ETH Zürich, D-INFK
HS 2015, 21. September 2015

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Lösung 1

1.1 Hilberts Hotel

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, die Gäste umziehen zu lassen. Wir stellen hier jeweils eine mögliche Lösung vor.

a) Der Gast im Zimmer mit der Nummer n zieht in das Zimmer $n + 1$. Dadurch wird Zimmer 1 frei, das Federer beziehen kann.

b) Ja. Dazu zieht der Gast aus Zimmer n in Zimmer $2n$ um. Dadurch werden alle Zimmer mit ungerader Nummer frei. Der neue Gast mit Nummer m kann dann in Zimmer $2m - 1$ einziehen.

c) Zuerst zieht wieder der Gast aus Zimmer n in Zimmer $2n$, sodass alle Zimmer mit ungerader Nummer frei werden. Nun zieht Gast Nummer m aus Bus Nummer i in das Zimmer mit der Nummer p_{i+1}^m ein, wobei p_i die i-te Primzahl[1] bezeichnet (d.h. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$).

Wir müssen nun noch einsehen, dass kein Gast in ein bereits durch einen alten Gast belegtes Zimmer einzieht, und dass keine zwei Gäste in das gleiche Zimmer einziehen. Ersteres folgt daraus, dass 2 die einzige gerade Primzahl ist; es ziehen also alle in ein Zimmer mit ungerader Nummer ein. Würden zwei Gäste in das gleiche Zimmer einziehen, müsste $p^i = q^j$ für verschiedene Primzahlen p und q gelten. Da eine Primzahlpotenz nur durch Potenzen der gleichen Primzahl teilbar ist, kann das nicht sein.

1.2 Kalenderspiel

Bob merkt sich folgende Liste von Daten: 20.01, 21.02, 22.03, 23.04, ..., 29.10, 30.11, 31.12. Zu Beginn streicht Alice den 1. Januar ab. Darauf streicht Bob den 20. Januar, das erste Datum auf der Liste, ab. Nun ist Alice am Zug. Wir bemerken, dass Alice gemäss den Spielregeln kein Datum auf Bobs Liste abstreichen kann. Sie muss entweder ein Datum vom 21. Januar bis zum 31. Januar oder aber den 20. eines späteren Monats abstreichen. Falls Sie ein Datum im Januar wählt (z.B. den 25.01), kann Bob das Datum mit dem gleichen Tag auf seiner Liste abstreichen (hier der 25.06). Falls Sie ein Datum mit dem gleichen Tag wählt (z.B. den 20.10), kann Bob das Datum mit dem gleichen Monat auf seiner Liste abstreichen (hier der 29.10). Ganz allgemein gilt, dass Alice nie ein Datum auf der Liste abstreichen kann, wenn Bob davor ein Datum auf der Liste abgestrichen hat. Umgekehrt,

[1] Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und sich selbst. Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

kann Bob immer ein Datum auf der Liste abstreichen, wenn Alice davor ein Datum abgestrichen hat, dass nicht auf der Liste ist. Da dabei die abgestrichenen Daten strikt monoton wachsen, wird Bob nach endlich vielen Zügen den 31.12 abstreichen.

1.3 Münzfälschung

Um die leichtere Münze zu finden teilt man die 27 Münzen in drei Mengen mit jeweils 9 Münzen auf und vergleicht zwei der Mengen mit Hilfe der Balkenwaage. Ist eine dieser zwei Mengen leichter, muss die gesuchte Münze in dieser Menge sein. Sind beide Menge gleich schwer, so ist die gesuchte Münze in der dritten Menge. Nun hat sich das Problem auf eine Menge von 9 Münzen reduziert. Analog teilt man diese Menge wieder in drei gleichgrosse Mengen auf und bestimmt die Menge mit der leichteren Münze durch einen Wiegevorgang. Jetzt hat man noch eine Menge von 3 Münzen. Von diesen drei Münzen vergleicht man zwei mit der Balkenwaage. Ist eine leichter, ist diese die gesuchte Münze. Ansonsten ist die dritte Münze die gesuchte.

1.4 Hütchenspiel

Alice kann einen leeren Becher wie folgt erraten. Sie zeigt auf den mittleren Becher und fragt Bob: "Ist der linke Becher leer?". Falls Bob bejaht, wählt sie den linken Becher ansonsten wählt sie den rechten Becher. Um zu zeigen, dass Alice mit ihrer Wahl immer richtig liegt machen wir eine Fallunterscheidung. Falls der mittlere Becher das Kügelchen enthält wird Bob lügen und die Frage mit Nein beantworten. Alice wählt somit den rechten Becher, der leer ist. Falls der mittlere Becher leer ist wird Bob die Wahrheit sagen. Falls nun der linke Becher das Kügelchen enthält wird er die Frage mit Nein beantworten. Alice wählt somit den rechten Becher, der leer ist. Falls nun der linke Becher leer ist, wird er die Frage mit Ja beantworten. Alice wählt somit den linken Becher, der leer ist.

1.5 ETH Studenten

Dave steht ganz links (6). Neben ihm steht auf dem 2. Platz die Person, die zu Fuss ankommt (4). In der Mitte steht die Person, die die Diskrete Mathematik mag (13).

Alice fährt mit dem Auto an die ETH (9), steht also auf einem der Plätze $3, 4, 5$. Die Studierenden, die mit dem Velo und Tram ankommen, stehen nebeneinander (10). Es folgt, dass die Person, die mit dem Zug ankommt, ganz links steht. Diese Person hat zudem ein grünes T-Shirt an (14).

Da die Person ganz links ein grünes T-Shirt anhat, mag die Person neben ihm auf Platz 2 den Hörsaal ETF C 1 (7).

Am Platz 2 stehen weder Dave (6) noch Alice (9). Eve mag den Hörsaal ML D 28 (1), steht also auch nicht auf Platz 2. Nehmen wir an, dass Carol auf Platz 2 stehen würde. Dann steht Bob, der Analysis mag (11), auf einem der Plätze $4, 5$. Die Person, die mit dem Tram ankommt, steht an einem der Plätze $4, 5$ (10) und mag die Lineare Algebra (12). Es folgt, dass eine der Personen an den Plätzen $1, 2$ die Digitaltechnik mag, und folglich ein rotes T-Shirt anhat (8). Da Dave ein grünes T-Shirt anhat und Carol ein schwarzes (5), haben wir somit einen Widerspruch erhalten. Es folgt, dass Carol nicht auf Platz 2 steht. Also muss Bob, der Analysis mag (11), auf Platz 2 stehen.

Bob hat weder das grüne noch das schwarze T-Shirt an (da Dave das grüne T-Shirt anhat und Carol das schwarze T-Shirt (5) anhat). Da Bob den Hörsaal ETF C 1 mag, hat er auch nicht das blaue T-Shirt an (2). Da Bob die Analysis mag (11), hat er auch nicht das rote T-Shirt (8) an. Also hat Bob das weisse T-Shirt an.

Eve hat weder das grüne noch das schwarze noch das weisse T-Shirt an (da Dave das grüne anhat, Carol das schwarze (5) anhat und Bob das weisse anhat). Da Eve den Hörsaal ML D 28 mag (1), hat sie auch nicht das blaue T-Shirt an (2). Also hat Eve das rote T-Shirt an und mag folglich die Digitaltechnik (8). Alice hat somit das blaue T-Shirt an und mag folglich den Hörsaal HG G 5 (2).

Dave fährt mit dem Zug, Bob geht zu Fuss, Alice fährt mit dem Auto (9). Da Eve die Digitaltechnik mag, fährt sie nicht mit dem Tram (12). Also muss Eve mit dem Velo fahren und folglich fährt Carol mit dem Tram.

Eve fährt mit dem Velo und mag die Digitaltechnik, muss also auf Platz 4 stehen (10). Folglich steht Carol, die mit dem Tram fährt, auf Platz 5 und Alice auf Platz 3.

Da Alice, die auf Platz 3 steht, den Hörsaal HG G 5 mag, mag Dave am Platz 1 den Hörsaal CAB G 51 (3).

Die vollständige Tabelle folgt.

1	2	3	4	5
Dave	Bob	Alice	Eve	Carol
grün	weiss	blau	rot	schwarz
Zug	zu Fuss	Auto	Velo	Tram
CAB G 51	ETF C 1	HG G 5	ML D 28	NO C 60
DnA	Analysis	DMath	Digitech	LinAlg