ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 27. September 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

# Diskrete Mathematik
# Lösung 2

### 2.1 Ein Beweis

Die Aussage „1 ist die grösste natürliche Zahl." besteht aus zwei Teilen. Zum einen aus $S$: „Es existiert eine grösste natürliche Zahl $n$" und zum anderen aus $T$: „$n = 1$". Der gegebene Beweis zeigt nicht, dass die Aussage $S$ und $T$ wahr ist. Stattdessen wird nur gezeigt, dass $S \Rightarrow T$ wahr ist. In anderen Worten: Der Beweis zeigt, falls eine grösste natürliche Zahl $n$ existiert, dann gilt $n = 1$.

### 2.2 Aussagenlogik

**a)** Die Aussagen können wie folgt in die normale Sprache übersetzt werden:

- **i)** $F_1$: Der Affe hat eine Banane und sitzt nicht auf der Palme.
- **ii)** $F_2$: Der Affe sitzt auf der Palme und hat eine Banane oder der Affe sitzt nicht auf der Palme und hat keine Banane.
  Der Affe hat entweder eine Banane oder sitzt nicht auf der Palme.

**b)** Die Aussagen können wie folgt formal geschrieben werden:

- **i)** $F_3 := \neg A \wedge \neg B$
- **ii)** $F_4 := (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

**c)**
- **i)** $F_3$: Der Affe sitzt auf der Palme oder hat eine Banane.
  $\neg F_3 \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$
- **ii)** $F_4$: Der Affe hat entweder eine Banane oder sitzt nicht auf der Palme.

$$\neg F_4 \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv F_2$$

### 2.3 Logische Folgerung

**a)** Wir betrachten die Funktionstabellen der involvierten Formeln.

| $A$ | $B$ | $A \wedge (A \rightarrow B)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Es zeigt sich, dass falls $A \wedge (A \to B)$ wahr ist auch $B$ wahr ist. *(1 Punkt)* Somit ist $B$ eine logische Folgerung von $A \wedge (A \to B)$. Die Aussage stimmt. *(1 Punkt)*

**b)** Die Aussage ist falsch. Dies zeigt sich wiederum aus der Funktionstabellen. Es gilt für $A$ falsch und $B$ wahr, dass $A \to B$ wahr ist, aber $\neg A \to \neg B$ falsch. *(1 Punkt)*
Somit ist $\neg A \to \neg B$ keine logische Folgerung der Formeln $A \to B$. *(1 Punkt)*

**c)** Wir betrachten die Funktionstabellen der involvierten Formel. *(2 Punkte)*

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \to B$ | $B \to C$ | $(A \to B) \wedge (B \to C)$ | $A \to C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es zeigt sich analog zur Teilaufgabe a), dass die Aussage stimmt. *(1 Punkt)*

### 2.4 Funktionstabellen und Äquivalenzen

**a)** So sieht die Funktionstabelle mit zwei Zwischenschritten aus:

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \to C$ | $\neg(A \to C) \wedge \neg(A \vee B)$ | $(B \to C) \to \big(\neg(A \to C) \wedge \neg(A \vee B)\big)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**b)** Wie man der Funktionstabelle entnehmen kann, ist die Formel genau dann wahr, wenn $B \wedge \neg C$ wahr ist. Eine äquivalente Formel ist also $B \wedge \neg C$.

**c)** Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& (B \to C) \to \big(\neg(A \to C) \wedge \neg(A \vee B)\big) && \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big(\neg(\neg A \vee C) \wedge \neg(A \vee B)\big) && \text{(Definition } \to \text{)} \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big(\big(\neg(\neg A) \wedge \neg C\big) \wedge \neg(A \vee B)\big) && (\,\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G\,) \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big(\big(\neg(\neg A) \wedge \neg C\big) \wedge (\neg A \wedge \neg B)\big) && (\,\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G\,) \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big((A \wedge \neg C) \wedge (\neg A \wedge \neg B)\big) && \text{(Doppelte Negation)} \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big(A \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge \neg B\big) && \text{(Assoziativität von } \wedge\text{)} \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big(\neg C \wedge \neg B \wedge A \wedge \neg A\big) && \text{(Kommutativität von } \wedge\text{)} \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big((\neg C \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg A)\big) && \text{(Assoziativität von } \wedge\text{)} \\
\equiv\ & (B \to C) \to \big((\neg C \wedge \neg B) \wedge \bot\big) && (\,F \wedge \neg F \equiv \bot\,) \\
\equiv\ & (B \to C) \to \bot && (\,F \wedge \bot \equiv \bot\,) \\
\equiv\ & \neg(B \to C) \vee \bot && \text{(Definition } \to \text{)} \\
\equiv\ & \neg(B \to C) && (\,F \vee \bot \equiv F\,) \\
\equiv\ & \neg(\neg B \vee C) && \text{(Definition } \to \text{)} \\
\equiv\ & \neg(\neg B) \wedge \neg C && (\,\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G\,) \\
\equiv\ & B \wedge \neg C && \text{(Doppelte Negation)}
\end{aligned}
$$

### 2.5 Erfüllbarkeit und Tautologien

**a)** Die Formel ist erfüllbar, da sie für die Belegung $A = 0, B = 1$ wahr ist, aber keine Tautologie, da sie für $A = 0, B = 0$ falsch ist.

**b)** Sei $F := \big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \wedge \neg(A \to C)$ die Formel aus der Aufgabenstellung. Gemäss Lemma 2.1 ist $F$ genau dann unerfüllbar, wenn $\neg F$ eine Tautologie. Wir haben $\neg F \equiv (A \to B) \wedge (B \to C) \ \to\ (A \to C)$. Wir wissen weiter aus Aufgabe 2.3 c), dass $(A \to B) \wedge (B \to C) \ \models\ (A \to C)$ gilt. Mit dem Lemma 2.2 folgt, dass $\neg F$ eine Tautologie ist und somit $F$ unerfüllbar ist.

### 2.6 Von Rittern und Schurken

Sei $A$ die Aussage „Der Mensch ist ein Ritter“ und $B$ „Der linke Weg führt in die Stadt“. Wir wollen herausfinden, ob $B$ wahr ist oder nicht. Dazu suchen wir eine Formel, die wahr ist, wenn $A$ und $B$ wahr sind (denn dann wird der Mensch wahrheitsgemäss antworten) und wenn $A$ und $B$ beide falsch sind (denn wenn $A$ falsch ist, wird der Mensch nicht die Wahrheit sagen). Andernfalls soll die Formel falsch sein. Eine mögliche Formel ist also $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$. Oder als Frage formuliert: „Bist du ein Ritter und der linke Weg führt in die Stadt oder ist es der Fall, dass du ein Schurke bist und der linke Weg in den Dschungel führt?“

Eine andere mögliche Frage ist „Würde ein Angehöriger der Gruppe, der du nicht angehörst, sagen, dass es rechts in die Stadt geht?“ Auch hier führt der linke Weg in die Stadt, wenn die Frage mit „Ja“ beantwortet wird.