ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 31. Oktober 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Lösung 4

Teil 1: Beweistechniken

4.1 Widerspruchsbeweis (2.4.8)

a) Sei x eine irrationale Zahl und sei r eine rationale Zahl. Wir nehmen nun an, dass die Summe $s = x + r$ rational ist. Um einen Widerspruch zu erhalten, zeigen wir, dass somit auch x rational sein muss. Wir können x schreiben als $x = s - r$. Nach dem Hinweis muss x somit rational sein, was im Widerspruch zur Annahme (über x) ist.

b) Sei $2^{\frac{1}{n}}$ rational, d.h. es gibt $p, q > 0$ mit $2^{\frac{1}{n}} = \frac{p}{q}$. Dadurch gilt $2 = \frac{p^n}{q^n}$ oder anders geschrieben $q^n + q^n = p^n$, was im Widerspruch zum Grossen Satz von Fermat steht.

Der Widerspruch zum Grossen Satz von Fermat erfolgt durch das Gegenbeispiel $q^n + q^n = p^n$.

4.2 Existenzbeweis (2.4.9)

a) Für $a = b = \sqrt{2}$ gilt, dass $ab = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ rational ist. Da $\sqrt{2}$ irrational ist (Beispiel 2.16), haben wir die Aussage bewiesen.

b) Wir betrachten $a = b = \sqrt{2}$. Falls $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist, sind wir fertig. Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist, betrachten wir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$. Es gilt, dass $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ rational ist, wodurch die Aussage bewiesen ist.

Dieser Beweis ist nicht konstruktiv, da die Wahl von a, b davon abhängt, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist. Tatsächlich wurde erst 1973 gezeigt, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist.

4.3 Schubfachprinzip (2.4.10)

Wir betrachten einen Grosskreis durch zwei der Punkte. Dieser teilt die Erdoberfläche in zwei Hemisphären, die beide den Grosskreis als Rand haben. Nach dem Schubfachprinzip sind nun mindestens zwei der drei verbleibenden Punkte auf einer dieser Hemisphäre. Da die zwei ersten beiden Punkte in beide Hemisphären liegen, gibt es somit eine Hemisphäre in der mindestens vier Punkte liegen.

Bemerkung: Es ist nicht notwendig, dass die fünf Punkte paarweise verschieden sind. Der Beweis ändert sich nur leicht: Falls alle Punkte gleich sind, liegen alle fünf Punkte in der gleichen Hemisphären. Falls zwei verschiedene Punkte existieren, betrachten wir den Grosskreis durch diese zwei Punkte. Dieser teilt die Erdoberfläche in zwei Hemisphären, die beide den Grosskreis als Rand haben. Nach dem Schubfachprinzip sind nun mindestens zwei der drei verbleibenden Punkte auf einer dieser Hemisphäre. Da die zwei ersten beiden Punkte in beide Hemisphären liegen, gibt es somit eine Hemisphäre in der mindestens vier Punkte liegen.

4.4 Gegenbeispiel (2.4.11)

a) Ein Gegenbeispiel ist $p = 11$, da $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ nicht prim ist. *(2 Punkte)*

Zahlen der Form $2^p - 1$ sind auch als Mersenne-Zahlen bekannt.

4.5 Induktionsbeweis (2.4.12)

a) **Induktionsverankerung:** Für $n = 0$ gilt die Aussage, da jeder Affe seine Stange hochklettert (es gibt keine Querverbindungen) und die dortige Banane nimmt.

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage gilt für n, d.h., für jede gültige Anordnung von n Querverbindungen bekommt jeder Affe eine Banane. Wir betrachten nun eine gültige Anordnung von $n+1$ Querverbindungen. Es gibt nun eine Querverbindung q zwischen zwei Stangen s_i und s_j welche am höchsten gelegen ist (muss nicht eindeutig sein). Falls wir q entfernen gilt per Induktionsannahme, dass jeder Affe eine Banane bekommt. Sei A_i (resp. A_j) der Affe der ohne q die Banane auf Stange s_i (resp. s_j) bekommt. Falls nun die Stange q wieder eingefügt wird ändert sich nur die Endposition der Affen A_i und A_j. Der Affe A_i wird über q von s_i nach s_j wechseln und die dortige Banane essen während der Affe A_j umgekehrt nun die Banane auf s_i nimmt. Die Aussage gilt also auch für $n + 1$.

Teil 2: Mengenlehre

4.6 Mengen, Mengenrelationen und Kardinalitäten

a) Folgende Mengen erfüllen die Bedingungen

i) $A = \{\varnothing\}$
Für $x = \varnothing$ gilt $x \in A$. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Somit gilt $x \subseteq A$. Die Lösung ist nicht eindeutig, da z.B. auch $A = \{7, \{7\}\}$ die Bedingung erfüllt. $\{\varnothing\}$ ist aber die kleinste Menge, welche als Lösung in Frage kommt. *(1 Punkt)*

ii) $A = \{\varnothing, 1\}$. Wir haben $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{\varnothing, 1\}$. Da $1 \notin \mathcal{P}(A)$, kann A auch keine Teilmenge von $\mathcal{P}(A)$ sein. Mit $x = \varnothing$, gilt $x \in A$ und $x \subseteq \mathcal{P}(A)$ (vgl. **i)**). *(1 Punkt)*

iii) $A = \varnothing$ Wir haben (vgl. **i)**), dass $A = \varnothing \subseteq \mathcal{P}(A)$. Da A keine Elemente enthält, ist die zweite Forderung trivialerweise erfüllt. *(1 Punkt)*

b) Man bemerkt zunächst, dass $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Damit erhält man folgende Liste:

i) $A \cup B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $|A \cup B| = 4$ *(1 Punkt)*

ii) $A \cap B = \{\{\varnothing\}\}$, $|A \cap B| = 1$ *(1 Punkt)*

iii) $\varnothing \times A = \varnothing$, $|\varnothing \times A| = 0$ *(1 Punkt)*

iv) $\{0\} \times \{3, 1\} = \{(0, 3), (0, 1)\}$, $|\{0\} \times \{3, 1\}| = 2$ *(1 Punkt)*

v) $\{\{1,2\}\} \times \{3\} = \{(\{1,2\},3)\}, |\{\{1,2\}\} \times \{3\}| = 1$ *(1 Punkt)*

vi) $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $|\mathcal{P}(\{\varnothing\})| = 2$ *(1 Punkt)*

4.7 Beweise zur Mengenlehre

a) Wir zeigen die beiden Richtungen einzeln:

$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$: Sei $A \subseteq B$. Wir müssen zeigen, dass jedes Element $S \in \mathcal{P}(A)$ auch ein Element von $\mathcal{P}(B)$ ist. Sei also S ein beliebiges Element aus $\mathcal{P}(A)$. Dann folgt mit Definition 3.5, dass $S \subseteq A$. Aus der Annahme $A \subseteq B$ und der Transitivität von $\subseteq$ folgt dann $S \subseteq B$. Somit ist S ein Element von $\mathcal{P}(B)$. Da dies für alle $S \in \mathcal{P}(A)$ gilt, ist $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$: Sei $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Weil $A \in \mathcal{P}(A)$ ist und $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ gilt $A \in \mathcal{P}(B)$. Damit ist A eine Teilmenge von B.

b) Die Folgerung gilt für alle Mengen $A \neq \varnothing$. Falls $A = \varnothing$, gilt für alle Mengen B und C

$$A \times B = \varnothing \times B = \varnothing = \varnothing \times C = A \times C.$$

Sie nun $A \neq \varnothing$ und $A \times B = A \times C$. Wir zeigen zunächst $B \subseteq C$. Sei dazu $b \in B$. Aus Definition 3.9 folgt für ein beliebiges Element $a \in A$ (ein solches Element existiert wegen $A \neq \varnothing$), dass $(a, b) \in A \times B = A \times C$. Wieder wegen Definition 3.9 gilt damit also auch $b \in C$.

Um $C \subseteq B$ zu zeigen, können wir den gleichen Beweis mit vertauschten Rollen von B und C wiederholen. Somit gilt $B = C$.