Diskrete Mathematik

Lösung 5

5.1 Mengenoperationen

a) Es gilt $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \;\; x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \;\; x \in A$.

b) Wir zeigen zuerst $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\begin{aligned} & x \in \overline{A \cup B} \\ \Leftrightarrow \;\; & x \notin A \cup B \\ \Leftrightarrow \;\; & x \notin A \text{ and } x \notin B \\ \Leftrightarrow \;\; & x \in \overline{A} \text{ and } x \in \overline{B} \\ \Leftrightarrow \;\; & x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Analog folgt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned} & x \in \overline{A \cap B} \\ \Leftrightarrow \;\; & x \notin A \cap B \\ \Leftrightarrow \;\; & x \notin A \text{ or } x \notin B \\ \Leftrightarrow \;\; & x \in \overline{A} \text{ or } x \in \overline{B} \\ \Leftrightarrow \;\; & x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\overline{(\overline{B} \cup C)} \cup \left(\overline{(\overline{A} \cup C)} \cap \overline{(A \cup B)}\right) && \\
&= (\overline{\overline{B}} \cap \overline{C}) \cup \left((\overline{\overline{A}} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})\right) && \Big| \; \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((A \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})\right) && \Big| \; \overline{\overline{X}} = X \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(((A \cap \overline{C}) \cap \overline{A}) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; \text{Assoziativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(((\overline{C} \cap A) \cap \overline{A}) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; \text{Kommutativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((\overline{C} \cap (A \cap \overline{A})) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; \text{Assoziativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((\overline{C} \cap \varnothing) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; X \cap \overline{X} = \varnothing \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((\overline{C} \cap (D \cap \overline{D})) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; X \cap \overline{X} = \varnothing \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(((\overline{C} \cap D) \cap \overline{D}) \cap \overline{B}\right) && \Big| \; \text{Assoziativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((\overline{C} \cap D) \cap (\overline{D} \cap \overline{B})\right) && \Big| \; \text{Assoziativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left((D \cap \overline{C}) \cap (\overline{D} \cap \overline{B})\right) && \Big| \; \text{Kommutativität} \cap \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(\overline{\overline{(D \cap \overline{C})}} \cap \overline{\overline{(\overline{D} \cap \overline{B})}}\right) && \Big| \; \overline{\overline{X}} = X \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(\overline{(\overline{D} \cup \overline{\overline{C}})} \cap \overline{(\overline{\overline{D}} \cup \overline{\overline{B}})}\right) && \Big| \; \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup \left(\overline{(\overline{D} \cup C)} \cap \overline{(D \cup B)}\right) && \Big| \; \overline{\overline{X}} = X \\
&= \left(\overline{(D \cup B)} \cap \overline{(\overline{D} \cup C)}\right) \cup (B \cap \overline{C}) && \Big| \; \text{Kommutativität } \cap \text{ und } \cup
\end{aligned}
$$

5.2 Verwandtschaftsrelationen

a) Die Relationen können wie folgt ausgedrückt werden:

- **i)** $iugr = iv \circ ie \circ ie$
- **ii)** $ihg = (ik \circ ie) - (ik \circ im \cap ik \circ iv)$
- **iii)** $ic = ik \circ ((ik \circ ie) - id) \circ ie$

b) Sie sind weder gleich noch ist die eine in der anderen enthalten. Um dies einzusehen, betrachte sechs verschiedene Menschen a, b, c, d, e, f, wobei c und d Mutter und

Vater von a und e und f Mutter und Vater von b sind, so dass c keine gemeinsamen Elternteile oder Kinder mit e oder f hat und f keine gemeinsamen Elternteile oder Kinder mit c oder d hat. Dann gilt a *ik* $\circ$ *ik* $\circ$ *ie* $\circ$ *ie* b genau dann wenn d und e ein gemeinsames Elternteil haben und a *ik* $\circ$ *ie* $\circ$ *ik* $\circ$ *ie* b gilt genau dann, wenn sie ein gemeinsames Kind haben. Im Allgemeinen impliziert das eine nicht das andere. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass solche a, b, c, d, e und f jeweils tatsächlich existieren.

5.3 Operationen auf Relationen

i) Zwei Zahlen (a, c) stehen in Relation, genau dann wenn ein b existiert, so dass $a < b$ und $b \mid c$. Sie ist nicht reflexiv, da $(1, 1) \notin < \circ \mid$. Sie ist nicht symmetrisch da $(1, 2) \in < \circ \mid$, aber $(2, 1) \notin < \circ \mid$. Sie ist auch nicht transitiv, da $(2, 0) \in < \circ \mid$ und $(0, 1) \in < \circ \mid$, aber $(2, 1) \notin < \circ \mid$.

ii) Zwei Zahlen (a, b) stehen in Relation, genau dann wenn $a \equiv_2 b$ oder $a|b$. Die Relation ist reflexiv da $a \equiv_2 a$ (oder auch $a|a$). Die Relation ist nicht symmetrisch, da $(1, 2) \in \mid \cup \equiv_2$, aber $(2, 1) \notin \mid \cup \equiv_2$. Die Relation ist auch nicht transitiv, da $(3, 1) \in \mid \cup \equiv_2$ und $(1, 2) \in \mid \cup \equiv_2$, aber $(3, 2) \notin \mid \cup \equiv_2$.

iii) Die Relation entspricht der leeren Relation $\varnothing$. Sie ist somit symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

iv) Die Relation entspricht der Identitätsrelation $=$ und ist somit reflexiv, symmetrisch und transitiv.

	Relation	reflexiv	symmetrisch	transitiv
i)	$< \circ \mid$	✗	✗	✗
ii)	$\mid \cup \equiv_2$	✓	✗	✗
iii)	$< \cap \overline{<}$	✗	✓	✓
iv)	$\overline{<} - \widehat{<}$	✓	✓	✓

5.4 Eigenschaften von Relationen

a) Es gilt $\rho^3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (4, 4)\}$ *(1 Punkt)*
und $\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
(1 Punkt)

b) Die Aussage ist falsch. Betrachte als Gegenbeispiel die Relation $\sigma = \{(0, 1), (1, 0)\}$ auf der Menge $\{0, 1\}$. Es gilt $\sigma^2 = \{(0, 0), (1, 1)\}$. *(1 Punkt)*
Offensichtlich ist σ nicht reflexiv, während σ^2 dies ist. Somit haben wir gezeigt, dass diese Aussage nicht allgemein für alle nicht-reflexiven Relationen gilt. *(1 Punkt)*

c) Die Aussage gilt. Wir geben nun zwei verschiedene (direkte) Beweise der Aussage.
1. Beweis:
Seien σ und ρ anti-symmetrische Relationen auf A. Wir zeigen, dass $(\sigma \cap \rho)$ anti-symmetrisch ist, d.h. wir zeigen für alle $(a, b) \in A \times A$ gilt

$$a\ (\sigma \cap \rho)\ b \ \wedge \ b\ (\sigma \cap \rho)\ a \ \Rightarrow a = b.$$

(1 Punkt)

Wir betrachten dazu $(a, b) \in A \times A$ mit $a\ (\sigma \cap \rho)\ b$ und $b\ (\sigma \cap \rho)\ a$. Aus $a\ (\sigma \cap \rho)\ b$ folgt, dass $a\ \sigma\ b$. Analog folgt aus $b\ (\sigma \cap \rho)\ a$, dass $b\ \sigma\ a$. *(1 Punkt)*

Da σ aber anti-symmetrisch ist, folgt dass $a = b$. *(1 Punkt)*

2. Beweis:

Seien σ und ρ anti-symmetrisch, dass heisst $\sigma \cap \hat{\sigma}^{-1} \subseteq \mathsf{id}$ und $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathsf{id}$. Wir zeigen, dasss $(\sigma \cap \rho) \cap (\sigma \cap \rho)^{-1} \subseteq \mathsf{id}$ gilt. *(1 Punkt)*

$$
\begin{aligned}
(\sigma \cap \rho) \cap (\sigma \cap \rho)^{-1} &= \sigma \cap \rho \cap (\sigma \cap \rho)^{-1} \\
&\subseteq \rho \cap (\sigma \cap \rho)^{-1} && (A \cap B \subseteq B) \\
&\subseteq \rho \cap (\rho)^{-1} && (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}) \\
&\subseteq \mathsf{id}
\end{aligned}
$$

Somit muss auch $\sigma \cap \rho$ anti-symmetrisch sein. Die Aussage $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ folgt direkt aus der Definition des Inversen einer Relation. *(2 Punkte)*

Bemerkung: In beiden Beweisen haben wir eigentlich eine allgemeinere Aussage bewiesen: Für eine anti-symmetrisch Relation σ auf A und eine beliebige Relation ρ auf A, ist auch die Relation $\sigma \cap \rho$ anti-symmetrisch.

5.5 Ein falscher Beweis

a) Wir geben ein Gegenbeispiel an: Sei $A = \{1, 2\}$ und $\rho = \{(1, 1)\}$. Dieses ρ ist symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv, da $2\ \rho\ 2$ nicht gilt.

b) Für ein beliebiges $x \in A$ muss es kein $y \in A$ mit $x\ \rho\ y$ geben.