ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 4. November 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik

Lösung 6

6.1 Äquivalenzrelationen

a) Es muss gezeigt werden, dass $\sim$ folgende Eigenschaften hat:

Reflexivität: Für einen beliebigen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) = 0.$$

Daraus folgt $(a, b) \sim (a, b)$, das heisst die Relation ist reflexiv *(1 Punkt)*

Symmetrie: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \sim (c, d)$, dass heisst

$$\big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) = 0.$$

(1 Punkt) Daraus folgt

$$\big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) - \big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) = 0$$

und somit auch $(c, d) \sim (a, b)$. *(1 Punkt)*

Transitivität: Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Es gilt daher

$$\big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) = 0$$

und

$$\big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) - \big((e-x)^2+f^2\big)\big((e+x)^2+f^2\big) = 0$$

(1 Punkt)

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((e-x)^2+f^2\big)\big((e+x)^2+f^2\big) \\
&= \big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) \\
&\quad + \big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) - \big((e-x)^2+f^2\big)\big((e+x)^2+f^2\big) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

und somit auch $(a, b) \sim (e, f)$. *(2 Punkte)*

b) Wir bemerken, dass $(a-x)^2+b^2$ der quadrierte Abstand von (a, b) zu $(x, 0)$ ist. Analog ist $(a + x)^2 + b^2$ der quadrierte Abstand von (a, b) zu $(-x, 0)$. *(1 Punkt)*

Somit enthält eine Äquivalenzklasse jeweils alle Punkte für die das Produkt der Abstände zu $(-x, 0)$ und zu $(x, 0)$ gleich gross sind. *(1 Punkt)*

Diese Klassen sind auch als Cassinische Kurven bekannt. Ein Spezialfall ist $[(0, 0)]$ für $x \neq 0$, welche eine Lemniskate ist.

6.2 Ordnungsrelationen

a) **i)** 11 und 12 sind unvergleichbar, da $11 \nmid 12$ und $12 \nmid 11$.

ii) 4 und 6 sind unvergleichbar, da $4 \nmid 6$ und $6 \nmid 4$.

iii) 5 und 15 sind vergleichbar, da $5 \mid 15$.

iv) 42 und 42 sind vergleichbar, da $42 \mid 42$.

b) Ein Element (a, b) ist kleiner gleich $(2, 5)$, falls $a \mid 2$ oder $a = 2$ und $b \mid 5$. Es folgt, dass $a \in \{1, 2\}$. Für $a = 1$ und $b \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt $(a, b) \leq_{\text{lex}} (2, 5)$, da $1 \mid 2$. Falls $a = 2$, muss $b \in \{1, 5\}$ sein. Die Elemente (a, b) mit $(a, b) \leq_{\text{lex}} (2, 5)$ sind also $(1, n)$,$(2, 5)$,$(2, 1)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) Nein, $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)$ ist kein Verband, da 9 und 12 keine gemeinsame obere Schranke haben.

d) Wir zeigen, dass $(A, \widehat{\preceq})$ ein Poset ist. Dazu zeigen wir, dass $\widehat{\preceq}$ eine partielle Ordnung auf A ist.

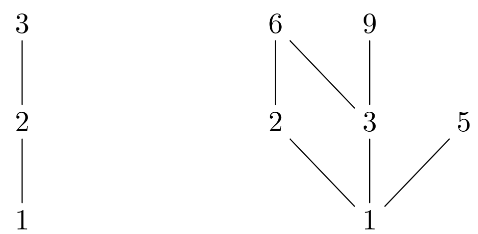
Reflexivität: Für $a \in A$ gilt $a \preceq a$ und somit auch $a \mathrel{\widehat{\preceq}} a$.

Antisymmetrie: Seien $a, b \in A$ mit $a \mathrel{\widehat{\preceq}} b$ und $b \mathrel{\widehat{\preceq}} a$. Dann gilt auch $b \preceq a$ und $a \preceq b$. Da $\preceq$ anti-symmetrisch ist, gilt somit $a = b$.

Transitivität: Es gelte $a \mathrel{\widehat{\preceq}} b$ und $b \mathrel{\widehat{\preceq}} c$. Somit gilt $c \preceq b$ und $b \preceq a$. Durch die Transitivität von $\preceq$ gilt also $c \preceq a$ und damit auch $a \mathrel{\widehat{\preceq}} c$.

6.3 Hasse-Diagramm

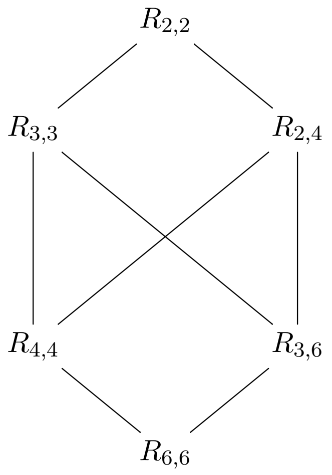
a) Die Hasse-Diagramme zu den Posets $(\{1, 2, 3\}; \leq)$ und $(\{1, 2, 3, 5, 6, 9\}; |)$ sehen folgendermassen aus:

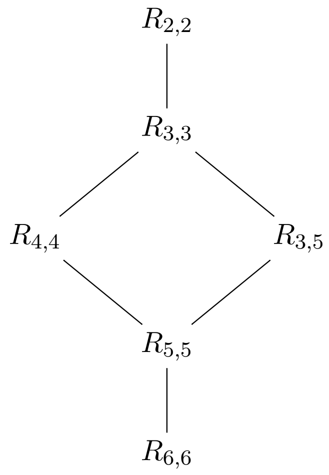


In beiden Fällen ist 1 kleinstes und minimales Element. In $(\{1, 2, 3\}; \leq)$ ist 3 grösstes und maximales Element. In $(\{1, 2, 3, 5, 6, 9\}; |)$ sind 5, 6 und 9 maximale Elemente und es gibt kein grösstes Element.

b) Wir bezeichnen ein Rechteck mit der Höhe x und der Breite y mit $R_{x,y}$. Die genaue Position der Rechtecke geben wir nicht an, da sie für betrachtete Relation nicht relevant ist. Wir können dann die Hasse-Diagramme z.B. so realisieren wie in folgender

Figur dargestellt:





Anmerkung: In obigen Diagrammen steht jeweils das „kleinere" Element über dem „grösserem". Das liegt daran, dass die Relation $\sqsupseteq$ so definiert ist, dass sich das „kleinere" Element auf der rechten Seite befindet.

6.4 Lexikographische Ordnung

Für Posets $(A;\preceq)$ und $(B;\sqsubseteq)$ ist die Lexikographische Ordnung $\leq_{\mathsf{lex}}$ auf $A \times B$ definiert als

$$(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_2, b_2) \;:\Longleftrightarrow\; a_1 \prec a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2)$$

Wir zeigen, dass $\leq_{\mathsf{lex}}$ die Eigenschaften einer partiellen Ordnung hat.

Reflexivität: Für (a_1, b_1) in $A \times B$ gilt $b_1 \sqsubseteq b_1$, da $\sqsubseteq$ reflexiv ist. Somit gilt $(a_1 = a_1 \wedge b_1 \sqsubseteq b_1)$ und daher $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_1, b_1)$.

Antisymmetrie: Wir betrachten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) in $A \times B$ mit $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_2, b_2)$ und $(a_2, b_2) \leq_{\mathsf{lex}} (a_1, b_1)$. Wir müssen zeigen, dass $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Es gilt also

$$\underbrace{a_1 \prec a_2}_{(1)} \vee \underbrace{(a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2)}_{(2)} \quad \text{und} \quad \underbrace{a_2 \prec a_1}_{(3)} \vee \underbrace{(a_2 = a_1 \wedge b_2 \sqsubseteq b_1)}_{(4)}.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung.

- (1) **und** (3)**:** Es muss gelten $a_1 \preceq a_2 \;\wedge\; a_1 \neq a_2$ und $a_2 \preceq a_1 \;\wedge\; a_2 \neq a_1$. Da aber $\preceq$ anti-symmetrisch ist, muss auch gelten $a_1 = a_2$, ein Widerspruch. Der Fall kann also nicht vorkommen.
- (1) **und** (4)**:** Es muss gelten $a_1 \preceq a_2 \wedge a_1 \neq a_2$ und $a_2 = a_1 \wedge b_2 \sqsubseteq b_1$, ein Widerspruch. Der Fall kann also nicht vorkommen.
- (2) **und** (3)**:** Es muss gelten $a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 \preceq a_1 \wedge a_2 \neq a_1$, ein Widerspruch. Der Fall kann also nicht vorkommen.

(2) **und** (4): Es muss gelten $a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 = a_1 \wedge b_2 \sqsubseteq b_1$. Da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist gilt also $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. In diesen (einzig möglichen) Fall gilt also $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Transitivität: Wir betrachten $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ in $A \times B$ mit $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_2, b_2)$ und $(a_2, b_2) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$. Wir müssen zeigen, dass $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$. Es gilt also

$$\underbrace{a_1 \prec a_2}_{(1)} \vee \underbrace{(a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2)}_{(2)} \quad \text{und} \quad \underbrace{a_2 \prec a_3}_{(3)} \vee \underbrace{(a_2 = a_3 \wedge b_2 \sqsubseteq b_3)}_{(4)}.$$

Wir machen wieder eine Fallunterscheidung.

(1) **und** (3): Es muss gelten $a_1 \prec a_2$ und $a_2 \prec a_3$. Da $\preceq$ eine partielle Ordnung ist, muss $\prec$ transitiv sein (vgl. Vorlesung). Es folgt $a_1 \prec a_3$ und damit auch $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$.

(1) **und** (4): Es muss gelten $a_1 \prec a_2$ und $a_2 = a_3 \wedge b_2 \sqsubseteq b_3$. Es folgt $a_1 \prec a_3$ und damit auch $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$.

(2) **und** (3): Es muss gelten $a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 \prec a_3$. Es folgt $a_1 \prec a_3$ und damit auch $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$.

(2) **und** (4): Es muss gelten $a_1 = a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$ und $a_2 = a_3 \wedge b_2 \sqsubseteq b_3$. Es folgt $a_1 = a_3$. Da $\sqsubseteq$ transitiv ist folgt weiter $b_1 \sqsubseteq b_3$. Somit gilt $(a_1, b_1) \leq_{\mathsf{lex}} (a_3, b_3)$.

6.5 Abzählbarkeit

a) **i)** Die Menge aller Java-Programme ist abzählbar. Jedes Programm kann als eine endliche binäre Folge angesehen werden. Somit gibt es eine Injektion von der Menge aller Java-Programme zur Menge der endlichen Binärfolgen.

ii) Abzählbar viele Mengen können nummeriert werden durch Indizes in $I \subseteq \mathbb{N}$. Wir haben also Mengen $S_0, S_1, S_2, \dots$ und $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Zu zeigen ist, dass S abzählbar ist.

Wir nehmen nun an, dass $S_0, S_1, S_2, \dots$ paarweise disjunkt sind. Ansonsten verwenden wir $S'_0 = S_0, S'_1 = S_1 - S_0, S'_2 = S_2 - (S_0 \cup S_1), \dots$. Da jede Menge S_i abzählbar ist, kann man die Elemente in S_i durch Indizes in $J \subseteq \mathbb{N}$ nummerieren. Wir haben also $S_i = \{s_{i,0}, s_{i,1}, s_{i,2}, \dots\}$ für alle $i \in I$.

Da $S_0, S_1, S_2, \dots$ paarweise disjunkt sind kann jedes Element in S eindeutig als $s_{i,j}$ für $i \in I$ und $j \in J$ geschrieben werden. Wir finden also eine Injektion $\phi : S \to I \times J \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\phi(s_{i,j}) = (i, j)$. Da nach Theorem 3.16 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist auch S abzählbar.

iii) Diese Menge ist überabzählbar. Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von Theorem 3.20. Nehmen wir also an, dass die Menge abzählbar ist. Wir bezeichnen mit $a_{i,j}$ die j-te Ziffer der i-ten Folge. Wir konstruieren nun eine Folge b, die nicht aufgezählt ist. Sei dazu $b_i \equiv_{10} a_{i,i} + 1$. Es gilt nun für jede Folge a_i, dass sich b an der i-ten Stelle von a_i unterscheidet. Somit ist b nicht Teil der Aufzählung, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Alternativer Beweis (Skizze): Es gibt nach Theorem 3.20 überabzählbar viele unendliche binäre Folgen. Diese Folgen bilden eine überabzählbare Teilmenge aller Folgen über $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Mit Lemma 3.13 kann man nun zeigen, dass somit auch die Menge aller $\{0, 1, \ldots, 9\}$ Folgen überabzählbar sein muss.

iv) Um eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ zu definieren, müssen wir festlegen, welche Elemente zueinander Äquivalent sind. Schauen wir uns zum Beispiel an, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Äquivalenzklasse von 0 zu definieren. Für jede natürliche Zahl müssen wir entscheiden, ob sie zu 0 äquivalent sein soll oder nicht. Jede Äquivalenzklasse von 0 können wir also durch eine unendlich lange binäre Folge charakterisieren, wobei eine 1 an der i-ten Stelle heisst, dass i zu 0 äquivalent ist und eine 0 an der i-ten Stelle heisst, dass i nicht zu 0 äquivalent ist. Zu jeder möglichen Äquivalenzklasse von 0 gibt es genau eine solche Folge und umgekehrt. Da es nach Theorem 3.20 überabzählbar viele unendliche binäre Folgen gibt, folgt, dass wir überabzählbar viele Möglichkeiten haben, die Äquivalenzklasse von 0 zu definieren. Folglich gibt es auf $\mathbb{N}$ überabzählbar viele Äquivalenzrelationen, die sich (mindestens) in der Äquivalenzklasse von 0 unterscheiden und somit gibt es insgesamt überabzählbar viele Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$.

b) Falls wir zum Zeitpunkt t auf die Position $s = x \cdot t + y$ schiessen, versenken wir das U-Boot falls es Geschwindigkeit x und Startposition y hat. Um das U-Boot garantiert zu versenken, müssen wir systematisch alle möglichen Paare (x, y) auf diese Weise testen. Wir brauchen also eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, welche jedem Zeitpunkt t ein Paar (x, y) zu ordnet. Dadurch ist garantiert, dass zu einem Zeitpunkt t' das richtige Paar (v, s_0) getestet wird, wodurch das U-Boot sinkt. Da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar ist (Beispiel 3.65 und Korollar 3.17), gibt es eine injektive Funktion $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Damit können wir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wie folgt definieren:

$$f(n) := \begin{cases} (a,b) & \textbf{falls} \quad \exists (a,b) \;\; g((a,b)) = n \\ (0,0) & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Da g eine injektive Funktion ist, gilt $\{(a, b)\} = g^{-1}(\{g((a, b))\})$ für alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Es gibt also für jedes solche (a, b) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = (a, b)$. Somit ist f surjektiv, womit wir das U-Boot in endlicher Zeit versenken können.