ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 23. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Lösung 12

12.1 Äquivalenz Aussagenlogischer Formeln

a)

$$
\begin{array}{rrcl|l}
 & (A \vee \neg(B \wedge A)) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \\
\equiv & (A \vee (\neg B \vee \neg A)) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{De Morgan (8)} \\
\equiv & (A \vee (\neg A \vee \neg B)) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{Kommutativität (2)} \\
\equiv & ((A \vee \neg A) \vee \neg B) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{Assoziativität (3)} \\
\equiv & (\top \vee \neg B) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{(11)} \\
\equiv & (\neg B \vee \top) & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{Kommutativität (2)} \\
\equiv & \top & \wedge & (C \vee (D \vee C)) & \text{Tautologieregel (9)} \\
\equiv & (C \vee (D \vee C)) & \wedge & \top & \text{Kommutativität (2)} \\
\equiv & (C \vee (D \vee C)) & & & \text{Tautologieregel (9)} \\
\equiv & (C \vee (C \vee D)) & & & \text{Kommutativität (2)} \\
\equiv & ((C \vee C) \vee D) & & & \text{Assoziativität (3)} \\
\equiv & (C \vee D) & & & \text{Idempotenz (1)}
\end{array}
$$

(3 Punkte)
(-1 Punkt, wenn keine Regeln angegeben wurden)
(-1 Punkt pro fehlerhafter Umformung)
(-0.5 Punkte, wenn Tautologieregeln ohne Kommutativität angewendet wurden)

b) Wir betrachten die Funktionstabelle von $F = (\neg A \to B \wedge C) \leftrightarrow \neg C$:

A	B	C	$(\neg A \to B \wedge C)$	$\neg C$	$(\neg A \to B \wedge C) \leftrightarrow \neg C$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

(1 Punkt)

Jedes Modell für F muss somit eine der folgenden Mengen enthalten $\{\{A = 0, B = 0, C = 1\}, \{A = 1, B = 0, C = 0\}, \{A = 1, B = 1, C = 0\}\}$. *(1 Punkt)*

Nun betrachten wir die Funktionstabelle von $G = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee \neg(\neg A \vee B \vee C)$:

A	B	C	$(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$	$\neg(\neg A \vee B \vee C)$	$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee \neg(\neg A \vee B \vee C)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

(1 Punkt)

Jedes Modell für G muss eine der folgenden Mengen enthalten $\{\{A = 0, B = 0, C = 1\}, \{A = 1, B = 0, C = 0\}\}$.

(1 Punkt)

Da die Menge der Modelle für G in der Menge der Modelle für F enthalten ist, ist jedes Modell für G auch ein Modell für F. Somit folgt F aus G, aber die Formeln sind nicht äquivalent, da die Mengen nicht gleich sind. *(1 Punkt)*

c) Wir zeigen beide Implikationen einzeln:

$G \models F$ impliziert $F \wedge G \equiv G$: Aus $G \models F$ folgt (nach Definition von $\models$), dass jede für F und G passende Wahrheitsbelegung, die ein Modell für G ist, auch ein Modell für F ist. Daher ist (nach Definition der Semantik von $\wedge$) jede solche Belegung auch ein Modell für $F \wedge G$. Es gilt also $G \models F \wedge G$. Andererseits gilt auch $F \wedge G \models G$, da für jede Belegung, die F und G wahr macht, insbesondere auch G wahr ist. Damit gilt nach Definition 6.12 $F \wedge G \equiv G$. *(2 Punkte)*

$F \wedge G \equiv G$ impliziert $G \models F$: Angenommen es gilt $F \wedge G \equiv G$. Dann folgt aus Definition 6.12 $G \models F \wedge G$. Sei $\mathcal{A}$ eine für F und G passende Belegung mit $\mathcal{A}(G) = 1$. Mit Definition 8.11 folgt $\mathcal{A}(F \wedge G) = 1$. Aus der Semantik von $\wedge$ folgt daraus $\mathcal{A}(F) = 1$. Insgesamt folgt $G \models F$. *(2 Punkte)*

d) Die Aussage ist falsch. Um das zu zeigen, betrachten wir folgendes Gegenbeispiel: Sei $F := A \vee \neg A$ und $G := B \vee \neg B$. Offensichtlich haben F und G keine gemeinsamen atomaren Formeln, aber nach Lemma 6.2 11) gilt: $F = A \vee \neg A \equiv \top \equiv B \vee \neg B = G$.

(2 Punkte)

12.2 Erfüllbarkeit

a) Wir geben ein Gegenbeispiel. Seien $F := A$ und $G := A \wedge \neg A$. Nun sind F (für $A = 1$) und $F \rightarrow G$ (für $A = 0$) erfüllbar. G ist aber unerfüllbar.

b)
i. $M = \{\neg A,\ B \wedge C,\ \neg A \rightarrow \neg C\}$ ist nicht erfüllbar, denn aufgrund von $\neg A \in M$ muss A falsch sein, aufgrund von $\neg A \rightarrow \neg C$ muss C dann ebenfalls falsch sein. Dann ist aber $B \wedge C$ ebenfalls falsch, im Widerspruch zur Forderung, dass alle Formeln aus M wahr sein müssen.

ii. Ein Modell für $N = \{A_1 \vee A_2,\ \neg A_2 \vee A_3,\ \neg A_3 \vee A_4, \ldots\}$ ist zum Beispiel die Belegung A_1 wahr und A_i falsch für alle $i > 1$. Als Beispiel könnte man sich etwa Aussagen $A_i =$ „i ist kleiner oder gleich 1" über $\mathbb{N}$ vorstellen.

12.3 Homers Geburtstag

a) Sei A die Aussage „Abe kommt", etc. Dann erhalten wir folgende Implikationen:

$$A \rightarrow B \tag{1}$$
$$B \rightarrow C \tag{2}$$
$$C \rightarrow D \tag{3}$$
$$(B \wedge D) \rightarrow \neg C \tag{4}$$
$$D \rightarrow (A \vee B) \tag{5}$$

Wir zeigen, dass niemand zu der Party kommt und Homer am Ende mal wieder bei Moe's landen wird. Dazu überlegen wir für jede Person, was passieren würde, wenn diese zur Party käme.

Ist A wahr, so schliessen wir der Reihe nach: B mit Formel (1), C mit Formel (2), D mit Formel (3) und $\neg C$ mit Formel (4), im Widerspruch zu C. Also muss A falsch sein.

Ist B wahr, so folgt wie oben C mit Formel (2), D mit Formel (3) und $\neg C$ mit Formel (4), im Widerspruch zu C. Daher muss auch B falsch sein.

Ist C wahr, so folgt D mit Formel (3) und $A \vee B$ mit Formel (5). Aus den ersten beiden Fällen wissen wir, dass sowohl die Annahme, dass A wahr ist, als auch die Annahme, dass B wahr ist, zu einem Widerspruch führen. Insbesondere führt also auch die Annahme, dass eines von beiden wahr ist ($A \vee B$) zu einem Widerspruch. Daraus folgt $\neg C$.

Ist D wahr, so ist es wegen Formel (5) auch $A \vee B$ und wir haben auch hier einen Widerspruch, d.h. es gilt $\neg D$.

Insgesamt sehen wir, dass niemand zur Party kommen kann. Tatsächlich sind auch alle Formeln wahr, wenn $A = B = C = D = 0$ gilt.

b) Wir verwenden nun die gegbenen Schlussregeln, um $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ und $\neg D$ formal herzuleiten:

$D \rightarrow B$	(6)	R_3 mit (5) und (1)	$\neg D$	(10)	R_2 mit (7) und (9)
$D \rightarrow C$	(7)	R_1 mit (6) und (2)	$\neg C$	(11)	R_5 mit (3) und (10)
$D \rightarrow (B \wedge D)$	(8)	R_4 mit (6)	$\neg B$	(12)	R_5 mit (2) und (11)
$D \rightarrow \neg C$	(9)	R_1 mit (8) und (4)	$\neg A$	(13)	R_5 mit (1) und (12)

12.4 Syntax und Semantik von XOR

Zu den bestehenden Definitionen muss folgendes hinzugefügt werden:

Syntax: Für alle Formeln F und G ist auch $(F \oplus G)$ eine Formel.

Semantik: $\mathcal{A}((F \oplus G)) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$, aber nicht beides.

12.5 Aussagenlogische Normalformen

a) Die Funktionstabelle von $F = (\neg A \to B \land C) \leftrightarrow \neg C$ sieht so aus:

A	B	C	$(\neg A \to B \land C)$	$\neg C$	$(\neg A \to B \land C) \leftrightarrow \neg C$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Daraus können wir wie im Beweis von Theorem 6.3 die äquivalente Formel

$$(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$$

in konjunktiver Normalform und

$$(\neg A \land \neg B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg C)$$

in disjunktiver Normalform ablesen.

b)

$$\begin{aligned}
& (A \land \neg B) \lor (\neg A \land (C \land D)) \\
\equiv\ & \big((A \land \neg B) \lor \neg A\big) \land \big((A \land \neg B) \lor (C \land D)\big) && \mid 6) \\
\equiv\ & \big(\neg A \lor (A \land \neg B)\big) \land \big((A \land \neg B) \lor (C \land D)\big) && \mid 2) \\
\equiv\ & \big((\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B)\big) \land \big((A \land \neg B) \lor (C \land D)\big) && \mid 6) \\
\equiv\ & \big((\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B)\big) \land \big(((A \land \neg B) \lor C) \land ((A \land \neg B) \lor D)\big) && \mid 6) \\
\equiv\ & \big((\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B)\big) \land \big((C \lor (A \land \neg B)) \land (D \lor (A \land \neg B))\big) && \mid 2), 2) \\
\equiv\ & (\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B) \land (C \lor A) \land (C \lor \neg B) \land (D \lor A) \land (D \lor \neg B) && \mid 6), 6)
\end{aligned}$$

Diese Formel ist in konjunktiver Normalform. Durch Verwendung der Äquivalenzen 2), 11), 2) und 9) lässt sich die Formel vereinfachen zu

$$(\neg A \lor \neg B) \land (C \lor A) \land (C \lor \neg B) \land (D \lor A) \land (D \lor \neg B).$$

Dies war aber nicht verlangt.