ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 8. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Lösung 13

13.1 Strukturen und Modelle

a) **i)** $\mathcal{A}$ ist ein Modell für F, denn für alle positiven ganzen Zahlen x, y, z gilt: *(1 Punkt)*

$$x \mid xy \ \ \wedge \ \ y \mid xy \ \ \wedge \ \ (y \nmid x \rightarrow yz \nmid x).$$

ii) $\mathcal{A}$ ist kein Modell für F, denn nicht für alle positiven ganzen Zahlen x, y, z gilt:

$$x \mid x^y \ \ \wedge \ \ y \mid x^y \ \ \wedge \ \ (y \nmid x \rightarrow y^z \nmid x).$$

Ein Gegenbeispiel ist $x = 2, y = 3$ mit $y \nmid x^y$. *(1 Punkt)*

iii) $\mathcal{A}$ ist ein Modell für F, denn für alle Teilmengen A, B, C von $\mathbb{N}$ gilt: *(1 Punkt)*

$$A \cap B \subseteq A \ \ \wedge \ \ A \cap B \subseteq B \ \ \wedge \ \ (A \not\subseteq B \rightarrow A \not\subseteq B \cap C).$$

b) **i)** Ein Modell für F ist zum Beispiel die passende Struktur:

$$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^+;\ f^{\mathcal{A}}(x) = 2x;\ P^{\mathcal{A}}(x, y) = 1 \Longleftrightarrow x \leq y;\ Q^{\mathcal{A}}(x, y) = 1;\ z^{\mathcal{A}} = 1.$$

Denn zu jeder positiven Zahl x gibt es eine positive Zahl y mit $x \leq y < 2x$, z.B. $y = 1.5x$, und $Q^{\mathcal{A}}(y, 1) = 1$ für alle positiven Zahlen y, also insbesondere auch für $y = 1.5x$. *(1 Punkt)*

ii) Passend aber kein Modell für F ist zum Beispiel die Struktur:

$$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^+;\ f^{\mathcal{A}}(x) = x;\ P^{\mathcal{A}}(x, y) = 0;\ Q^{\mathcal{A}}(x, y) = 0;\ z^{\mathcal{A}} = 1.$$

Denn für alle x, y gilt $Q^{\mathcal{A}}(x, y) = 0$. *(1 Punkt)*

iii) Nicht passend für F ist zum Beispiel die Struktur *(1 Punkt)*

$$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^+;\ z^{\mathcal{A}} = 42.$$

c) **i)** Eine gültige Formel ist z.B. $\forall x \left(P(x) \vee \neg P(x)\right)$. *(1 Punkt)*

ii) Eine unerfüllbare Formel ist z.B. $\forall x \left(P(x) \wedge \neg P(x)\right)$. *(1 Punkt)*

13.2 Bestimmung der Freien Variablen einer Formel

a) **i)** $\forall x \forall y\ (P(x, y) \vee P(x, \underline{\mathbf{z}}))$

ii) $\left(\forall x\ (\exists x\ P(x) \wedge P(x)) \vee P(\underline{\mathbf{x}})\right)$
Hier ist das dritte x durch $\exists x$ gebunden und das vierte durch $\forall x$.

iii) $\forall x \left(\exists y\ P(y, x) \vee \exists z\ Q(x, f(z))\right)$
In dieser Formel kommen keine freien Variablen vor.

13.3 Pränexform

Das einzige freie Vorkommen einer Variablen ist in der folgenden Formel unterstrichen:

$$F = \forall z \exists y\, (P(\underline{x}, g(y), z) \vee \neg \forall x\, Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x\, \neg R(f(x, z), z).$$

Im ersten Schritt bereinigen wir die Formel, das heisst wir lösen die Namenskollisionen auf. Betroffen sind x, das einmal frei sowie zweimal gebunden vorkommt, sowie z, das zweimal gebunden auftritt. Durch gebundene Umbenennungen erhalten wir

$$F \equiv \forall z \exists y\, (P(x, g(y), z) \vee \neg \forall t\, Q(t)) \wedge \neg \forall u \exists v\, \neg R(f(v, u), u).$$

Nun können wir eine Pränexform bilden, indem wir die Quantoren nach vorne ziehen. Dabei müssen $\forall$ und $\exists$ jedes Mal vertauscht werden, wenn ein Quantor über ein $\neg$ gezogen wird, das sich auf eine Teilformel bezieht, in der dieser Quantor vorkommt. Wir erhalten

$$F \equiv \forall z \exists y \exists t \exists u \forall v \big((P(x, g(y), z) \vee \neg Q(t)) \wedge R(f(v, u), u) \big).$$

13.4 Prädikatenlogik mit Identität

a) Als Bedingungen können wir wählen:

i) $|U^{\mathcal{A}}| = 1$ *(1 Punkt)*

ii) $|U^{\mathcal{A}}| \geq 2$ *(1 Punkt)*

Wir zeigen nun, dass diese Bedingungen jeweils notwendig und hinreichend sind: Wenn das Universum nur ein Element enthält, dann gibt es keine zwei verschiedenen Elemente x und y im Universum – für alle Elemente x, y des Universums gilt $x = y$. Dies beweist, dass $|U^{\mathcal{A}}| = 1$ hinreichend für $\forall x \forall y\ (x = y)$ ist, und dass $|U^{\mathcal{A}}| \geq 2$ notwendig für $\neg \forall x \forall y\ (x = y) \equiv \exists x \exists y\ \neg(x = y)$ ist. *(1 Punkt)*

Hat das Universum hingegen mehr als ein Element, gibt es zwei verschiedene Elemente x, y im Universum – nicht für alle Elemente x, y des Universums gilt $x = y$. Daher ist $|U^{\mathcal{A}}| = 1$ notwendig für $\forall x \forall y\ (x = y)$ und $|U^{\mathcal{A}}| \geq 2$ hinreichend für $\exists x \exists y\ \neg(x = y)$. *(1 Punkt)*

b) Als Formel kann $\exists x \exists y \exists z \big(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(x = z)\big)$ verwendet werden. *(1 Punkt)*

Gibt es mindestens drei Elemente im Universum, können diese als x, y beziehungsweise z verwendet werden, um diese Formel zu erfüllen. *(0.5 Punkte)*

Für Strukturen, deren Universum weniger als drei Elemente enthält, sind nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei von drei aus dieser Menge gewählten Elementen gleich. Solche Strukturen sind also nicht Modell der Formel. *(0.5 Punkte)*

13.5 Folgerungen

a) Die Folgerung gilt. Sei $\mathcal{A}$ eine passende Struktur für $F \vee \exists y\, \neg F$. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Modell ist. Falls $\mathcal{A}(\exists y\, \neg F) = 1$ gilt $\mathcal{A}_{[y \to u]}(\neg F) = 1$ für ein $u \in U_{\mathcal{A}}$. Andererseits, falls $\mathcal{A}(\exists y\, \neg F) = 0$, gilt $\mathcal{A}_{[y \to u]}(\neg F) = 0$ für alle $u \in U_{\mathcal{A}}$ und damit auch $\mathcal{A}(\neg F) = 0$.

Per Definition folgt daraus $\mathcal{A}(F) = 1$. Also gilt in beiden Fällen $\mathcal{A}(F \lor \exists y \neg F) = 1$, die Formel ist also eine Tautologie.

b) Die Folgerung gilt nicht. Als "Gegenbeispiel"geben wir Formeln F und G mit einer Struktur $\mathcal{A}$ an, so dass $\mathcal{A}$ passend für $\exists x\ F \land \exists y\ G$ und $F \land G$ ist, aber nur für $\exists x\ F \land \exists y\ G$ ein Modell ist. Seien $F = P(x)$ und $G = P(y)$. Betrachte das Universum der natürlichen Zahlen. Sei $P(x) = prime(x)$ und seien $x = y = 15$. Dann ist $\exists x\ F \land \exists y\ G$ wahr, da $\mathcal{A}_{[x\to 2]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[y\to 2]}(G) = 1$. Andererseits ist $\mathcal{A}(F \land G) = 0$, da 15 keine Primzahl ist.

c) Die Folgerung gilt. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von $\{\forall x\ F, \forall y\ G\}$, dass passend für $F \land G$ ist. Es gilt $\mathcal{A}(\forall x\ F) = 1$ und $\mathcal{A}(\forall y\ G) = 1$. Per Definition gilt $\mathcal{A}_{[x\to u]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[y\to v]}(G) = 1$ für alle $u, v \in U_{\mathcal{A}}$. Dadurch folgt auch $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$. Per Definition gilt damit aber auch $\mathcal{A}(F \land G) = 1$. Also ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell von $F \land G$.

13.6 Der Barbier von Zürich

Nach Theorem 6.10 ist

$$F := \neg\exists x \forall y \left(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)\right)$$

eine Tautologie, d.h. jede passende Struktur ist ein Modell für F. Wir definieren eine Struktur $\mathcal{A}$ wie folgt: Sei $U^{\mathcal{A}}$ die Menge aller Männer in Zürich und sei genau dann $P^{\mathcal{A}}(x, y) = 1$, wenn der Mann y den Mann x rasiert. Die Formel F aus dem Theorem liefert in diesem Fall: Es gibt keinen Mann x, sodass für alle Männer y gilt, dass x den Mann y genau dann rasiert, wenn y sich nicht selbst rasiert. Der Barbier aus der Aufgabe wäre aber genau so ein x und existiert demnach nicht.

13.7 Die Übung 13

a) Die Aussage kann wie folgt formalisiert werden:

$$F :\equiv \exists x \left(P(x) \rightarrow \forall y\ P(y)\right)$$

b) Wir zeigen nun, dass F eine Tautologie ist.

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists x \left(\neg P(x) \lor \forall y\ P(y)\right) && \text{Definition von} \rightarrow \\
&\equiv \left(\exists x\ \neg P(x)\right) \lor \left(\forall y\ P(y)\right) && \text{Lemma 6.6 10)} \\
&\equiv \neg\left(\forall x\ P(x)\right) \lor \left(\forall y\ P(y)\right) && \text{Lemma 6.6 1)} \\
&\equiv \neg\left(\forall x\ P(x)\right) \lor \left(\forall x\ P(x)\right) && \text{Lemma 6.8} \\
&\equiv \top && \text{Lemma 6.2 2)/11)}
\end{aligned}$$

c) Sei U die Menge aller Menschen und P das Prädikat, dass angibt ob ein Mensch aus U trinkt. F kann also wie folgt interpretiert werden:

> Es gibt einen Menschen, so dass, falls dieser Mensch trinkt, alle Menschen trinken.

Sei U die Menge ETH-Professoren und P das Prädikat, dass angibt ob ein Professor sein Fachgebiet versteht. F kann also wie folgt interpretiert werden:

> Es gibt einen Professoren, so dass, falls dieser sein Fachgebiet versteht, alle Professoren ihr Fachgebiet verstehen.