ETH Zürich, D-INFK
HS 2015, 21. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik

Lösung 14

14.1 Syntax von Formeln und Aussagen über Formeln

a) $\forall x\ \exists y\ P(z)$ ist eine syntaktisch korrekte Formel (die zu $P(z)$ äquivalent ist).

b) $P(x) \models Q(y) \vee P(y)$ ist eine Aussage über die Formeln $P(x)$ und $Q(y) \vee P(y)$. Diese Aussage stimmt nicht. Betrachte als Gegenbeispiel die Struktur $U^{\mathcal{A}} := \{0, 1\}$, $P^{\mathcal{A}}(x) = 1 \Longleftrightarrow Q^{\mathcal{A}}(x) = 1 :\Longleftrightarrow x = 1, x^{\mathcal{A}} := 1, y^{\mathcal{A}} := 0$. Dann gilt $\mathcal{A}(P(x)) = 1$, aber $\mathcal{A}(Q(y) \vee P(y)) = 0$.

c) $(P(x) \models P(x)) \equiv Q(x)$ ist kein gültiger Ausdruck, da $\equiv$ nur zwischen zwei Formeln verwendet werden kann und $(P(x) \models P(x))$ keine Formel ist (sondern eine Aussage über Formeln).

d) $\forall x\ P(x) \models P(x)$ ist eine Aussage über die Formeln $\forall x\ P(x)$ und $P(x)$. Diese Aussage ist korrekt. Jedes Modell von $\forall x\ P(x)$, dass auch passend für $P(x)$ ist, ist auch ein Modell von $P(x)$ (vgl. Definition 6.32).

e) $P(x) \models \forall x\ P(x)$ ist eine Aussage über die Formeln $P(x)$ und $\forall x\ P(x)$. Diese Aussage ist nicht korrekt. Betrachte als Gegenbeispiel die Struktur $U^{\mathcal{A}} := \{0, 1\}$, $P^{\mathcal{A}}(x) = x, x^{\mathcal{A}} = 1$. Dann gilt $\mathcal{A}(P(x)) = 1$, aber $\mathcal{A}(\forall x\ P(x)) = 0$.

f) $\{P(x), P(f(a))\} \models P(a)$ ist eine Aussage über Formeln und ist nicht korrekt. Betrachte als Gegenbeispiel die Struktur $U^{\mathcal{A}} := \{0, 1\}, P^{\mathcal{A}}(x) = x, x^{\mathcal{A}} = 1, f^{\mathcal{A}}(x) \equiv 1, a^{\mathcal{A}} = 0$. Dann gilt $\mathcal{A}(P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(P(f(a))) = 1$, aber $\mathcal{A}(P(a)) = 0$.

14.2 Zusammenhang zwischen Gültigkeit einer Formel und Aussagen über Formeln

a) Sei $F := (G_1 \wedge \cdots \wedge G_k) \rightarrow H$. Für fixe Formel $G_1 \ldots G_k, H$, ist F genau dann eine Tautologie, wenn $\mathcal{A}((G_1 \wedge \cdots \wedge G_k) \rightarrow H) = 1$ für alle zu $G_1 \ldots G_k$ und H passenden Belegungen $\mathcal{A}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle solchen Belegungen mit $\mathcal{A}(G_1) = \cdots = \mathcal{A}(G_k) = 1$ auch $\mathcal{A}(H) = 1$ gilt, was per Definition $\{G_1, \ldots, G_k\} \models H$ entspricht.

b) Sei $F := G \longleftrightarrow H$. Für fixe Formel G, H, ist F genau dann eine Tautologie, wenn $\mathcal{A}(G \longleftrightarrow H) = 1$ für alle zu G und H passenden Belegungen $\mathcal{A}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle solchen Belegungen $\mathcal{A}(G) = 1$ genau dann wenn $\mathcal{A}(H) = 1$ gilt, was per Definition $G \equiv H$ entspricht.

14.3 Kalküle

a) Korrekt sind die Regeln R_1, R_2, R_4 und R_6.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Funktionstabellen für die einzelnen Regeln. Eine Regel ist korrekt, wenn die herleitbare Formel immer gilt, wenn die Vorbedingungen gelten. Bei den Regeln R_3 und R_5 sind die Zeilen, die der Korrektheit widersprechen, fett gedruckt.

	F	G	F	$F \vee G$
	0	0	0	0
R_1:	0	1	0	1
	1	0	1	1
	1	1	1	1

	F	G	$F \wedge G$	F
	0	0	0	0
R_2:	0	1	0	0
	1	0	0	1
	1	1	1	1

	F	G	$\neg(F \wedge G)$	$\neg F \wedge \neg G$
	0	0	1	1
R_3:	**0**	**1**	**1**	**0**
	1	**0**	**1**	**0**
	1	1	0	0

	F	G	F	$F \to G$	G
	0	0	0	1	0
R_4:	0	1	0	1	1
	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1

	F	G	$F \to G$	$\neg F \to \neg G$
	0	0	1	1
R_5:	**0**	**1**	**1**	**0**
	1	0	0	1
	1	1	1	1

	F	G	$F \wedge G$
	0	0	0
R_6:	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

b) Es gilt $K = \{R_1, R_2, R_4, R_6\}$. Man kann mit K wie folgt aus der Formelmenge $\{(D \wedge A) \to C, A \wedge B, B \wedge A, (B \vee C) \to D\}$ die Formel $A \wedge B \wedge C \wedge D$ herleiten:

$$\{B \wedge A\} \vdash_{R_2} B, \quad \{B\} \vdash_{R_1} B \vee C, \quad \{B \vee C, (B \vee C) \to D\} \vdash_{R_4} D$$
$$\{A \wedge B\} \vdash_{R_2} A, \quad \{D, A\} \vdash_{R_6} D \wedge A, \quad \{D \wedge A, (D \wedge A) \to C\} \vdash_{R_4} C$$
$$\{A \wedge B, C\} \vdash_{R_6} A \wedge B \wedge C, \quad \{A \wedge B \wedge C, D\} \vdash_{R_6} A \wedge B \wedge C \wedge D$$

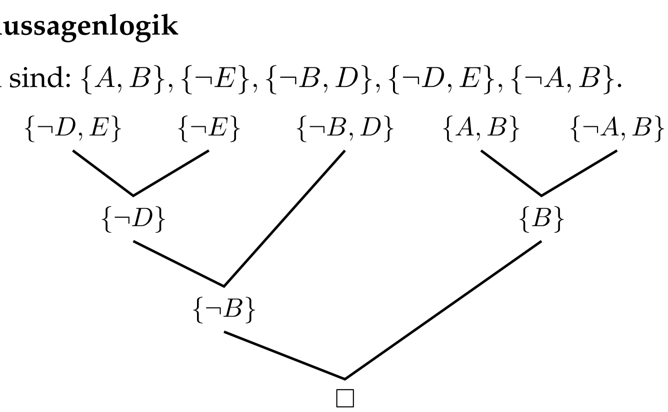
c) Der Kalkül $K = \{R_2, R_4\}$ ist nicht vollständig, da z.B. $B \wedge A$ aus $A \wedge B$ nicht hergeleitet werden kann, obwohl $A \wedge B \models B \wedge A$ gilt: Auf die Menge $M_0 := \{A \wedge B\}$ kann aber nur R_2 mit $F := A$ und $G := B$ angewendet werden, sodass man $M_1 := \{A \wedge B, A\}$ erhält. Daraus können mit den gegebenen Regeln keine neuen Formeln hergeleitet werden.

d) Vollständig aber nicht korrekt ist z.B. der Kalkül $K := \{R\}$ mit $\emptyset \vdash_R F$.

Mit K kann man jede Formel F herleiten, also ist K vollständig. Man kann aber z.B. auch aus $\emptyset$ die Formel $A \wedge B$ herleiten, obwohl diese keine Tautologie ist. Daher ist K nicht korrekt.

14.4 Resolution für Aussagenlogik

a) **i)** Die Klauseln sind: $\{A, B\}, \{\neg E\}, \{\neg B, D\}, \{\neg D, E\}, \{\neg A, B\}$.

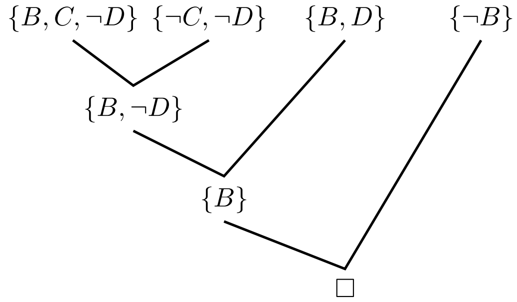


Also ist die Formel nicht erfüllbar.

ii) Die Formel $G = (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$ ist genau dann eine Tautologie, wenn

$$\neg G \equiv (B \vee C \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B)$$

unerfüllbar ist. Wir zeigen also mit Resolution die Unerfüllbarkeit von $\neg G$:



Daraus folgt, dass G eine Tautologie ist.

b) In der Menge $\mathcal{K}$ kommen insgesamt nur endlich viele atomare Formeln vor. Sei k deren Anzahl. Jede dieser atomaren Formeln kann in einer Klausel positiv vorkommen, negativ vorkommen, sowohl positiv als auch negativ vorkommen oder gar nicht vorkommen. Also gibt es 4^k verschiedene Klauseln, in denen die gleichen atomaren Formeln vorkommen wie in $\mathcal{K}$. Da durch einen Resolutionsschritt keine neuen atomaren Formeln entstehen, enthalten auch alle $\mathcal{K}_i$ höchstens 4^k Klauseln. Da ausserdem $\mathcal{K}_{i-1} \subseteq \mathcal{K}_i$ für alle $i > 0$ gilt, kann $\mathcal{K}_i \neq \mathcal{K}_{i-1}$ nicht für unendlich viele i gelten, da sonst jeweils $|\mathcal{K}_{i-1}| < |\mathcal{K}_i|$ und gleichzeitig $|\mathcal{K}_i| \leq 4^k$ für unendlich viele i gelten müsste. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ (z.B. das grösste der endlich vielen i mit $\mathcal{K}_i \neq \mathcal{K}_{i-1}$), sodass für alle $m > n$ gilt $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m-1} = \ldots = \mathcal{K}_n$.

c) Sei

$$\mathcal{K}_i := \mathcal{K} \cup \bigcup_{j=1}^{i} \big\{\{A_0, \neg A_{j+1}\}\big\} \text{ für } i \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_i \neq \mathcal{K}_{i-1}$ für alle $i > 0$. Es bleibt zu zeigen, dass für alle $i > 0$ gilt: $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} \cup \{K\}$ mit $\{K_1, K_2\} \vdash_{\mathsf{res}} K$ für geeignete $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{i-1}$. Sei dazu $i > 0$. Sei weiter $K_1 := \{A_0, \neg A_i\} \in \mathcal{K}_{i-1}$ und $K_2 := \{A_i, \neg A_{i+1}\} \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{i-1}$. Dann gilt $\{K_1, K_2\} \vdash_{\mathsf{res}} \{A_0, \neg A_{i+1}\} =: K$ und

$$\mathcal{K}_i := \mathcal{K} \cup \bigcup_{j=1}^{i} \big\{\{A_0, \neg A_{j+1}\}\big\} = \mathcal{K} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \big\{\{A_0, \neg A_{j+1}\}\big\} \cup \big\{\{A_0, \neg A_{i+1}\}\big\} = \mathcal{K}_{i-1} \cup \{K\}.$$