ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 21. September 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 1

Dieses Übungsblatt enthält Denksportaufgaben zu Bereichen, die für diese Vorlesung relevant sind. Die Lösungen dieser Aufgaben werden bereits in der ersten Übung besprochen. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1.1 Hilberts Hotel

David Hilbert[1] ist Manager eines Hotels mit unendlich vielen Zimmern, die mit $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert und alle belegt sind. Jeder Gast ist bereit, höchstens einmal in ein anderes Zimmer umzuziehen.

a) ($\star\star$) Roger Federer fragt, ob noch ein Zimmer frei ist. Hilbert möchte den berühmten Gast nicht enttäuschen und sichert ihm ein Zimmer zu. Dazu lässt er Gäste innerhalb des Hotels umziehen. Wie kann er vorgehen, damit alle Gäste weiterhin ein Zimmer haben?

b) ($\star\star\star$) Ein Bus mit unendlich vielen Gästen, die mit $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind, fährt vor das Hotel. Ist es möglich, erneut alle Gäste unterzubringen?

c) ($\star\star\star\star$) Unendlich viele Busse, die mit $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind und jeweils unendlich viele Gäste mitbringen, welche ebenso nummeriert sind, fahren vor. Was tut Hilbert nun?

1.2 Kalenderspiel ($\star\star\star$)

Alice und Bob haben bei einem Mathematik-Wettbewerb eine grosse Tafel Schokolade gewonnen. Anstatt die Tafel einfach zu teilen, schlägt Bob ein Spiel vor bei dem Kalenderdaten abgestrichen werden. Alice beginnt und streicht den 1. Januar ab. Als nächstes darf Bob ein neues Datum abstreichen. Dabei muss das neue Datum entweder später im gleichen Monat (z.B. 5. Januar) oder aber der gleiche Tag in einem späteren Monat sein (z.B. 1. Mai). Nun streichen Alice und Bob abwechseln weitere Daten nach diesen Regeln ab. Gewonnen hat die Person, die den 31. Dezember abstreicht. Nach kurzer Bedenkzeit lehnt Alice den Vorschlag entrüstet ab.

Erklären Sie die Reaktion von Alice indem Sie zeigen, dass es eine Strategie für Bob gibt, mit dem er immer den 31. Dezember abstreichen und somit die Tafel Schokolade gewinnen kann.

[1] In Wirklichkeit war David Hilbert (1862 – 1943) ein bedeutender Mathematiker, der ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern als Gedankenexperiment vorschlug.

1.3 Münzfälschung ($\star\star$)

In einer Schatztruhe sind 27 gleich aussehende Goldmünzen. Eine Münze wurde mit Silber gestreckt und ist daher leichter. Wie kann man diese Münze mit Hilfe einer Balkenwaage finden, wenn man genau dreimal wägen darf?

1.4 Hütchenspiel ($\star\star\star$)

Auf einem Tisch stehen drei Becher in einer Reihe. In einem Becher hat Bob ein Kügelchen versteckt. Alice soll nun einen der leeren Becher erraten. Dazu darf Sie auf einen Becher zeigen und Bob eine Ja-Nein-Frage stellen. Falls Alice auf einen leeren Becher zeigt wird Bob die Frage wahrheitsgemäss beantworten, ansonsten wird Bob lügen. Wie kann Alice immer einen leeren Becher erraten?.

1.5 ETH-Studenten ($\star\star$)

Es stehen fünf ETH-Studierende in einer Reihe.

(1) Eve mag den Hörsaal ML D 28.
(2) Die Person mit einem blauen T-Shirt mag den Hörsaal HG G 5.
(3) Die Person mit einem weissen T-Shirt steht neben der Person, die den Hörsaal CAB G 51 mag.
(4) Dave steht neben der Person, die zu Fuss an die ETH kommt.
(5) Carol hat ein schwarzes T-Shirt an.
(6) Dave steht ganz links.
(7) Die Person mit einem grünen T-Shirt steht neben der Person, die den Hörsaal ETF C 1 mag.
(8) Die Person, die die Digitaltechnik mag, hat ein rotes T-Shirt an.
(9) Alice fährt mit dem Auto an die ETH.
(10) Die Person, die mit dem Tram ankommt, steht direkt rechts von der, die mit dem Velo ankommt.
(11) Bob mag die Analysis.
(12) Wer mit dem Tram fährt, mag die Lineare Algebra.
(13) Die mittlere Person mag die Diskrete Mathematik.
(14) Die Person, die mit dem Zug ankommt, hat ein grünes T-Shirt an.

Wer mag die Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen und wer mag den Hörsaal NO C 60? Bestimmen Sie zudem für jede Person, an welchem Platz sie steht, welche Farbe ihr T-Shirt hat, wie sie an die ETH kommt und welchen Hörsaal und Vorlesung sie mag.

Nachbesprechung am 26./27. September 2016