

Diskrete Mathematik

Übung 2

2.1 Ein Beweis (★ ★)

Behauptung: 1 ist die grösste natürliche Zahl.

Beweis: Sei n die grösste natürliche Zahl.

$$\Rightarrow n^2 \leq n.$$

$$\Rightarrow n(n-1) = n^2 - n \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq n \leq 1$$

$$\Rightarrow n = 1.$$

Finden Sie den Fehler im Beweis.

2.2 Aussagenlogik

Sei A die Aussage „Der Affe sitzt auf der Palme.“ und B die Aussage „Der Affe hat eine Banane.“.

a) (★) Was bedeuten die folgenden zwei Aussagen?

$$\text{ i) } F_1 := B \wedge \neg A \quad \text{ ii) } F_2 := (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

b) (★) Schreiben Sie unter Verwendung von A und B die folgenden zwei Aussagen formal hin:

i) F_3 : „Der Affe sitzt weder auf der Palme noch hat er eine Banane.“

ii) F_4 : „Der Affe hat entweder eine Banane oder sitzt auf der Palme.“

c) (★ ★) Geben Sie zu den beiden Aussagen F_3, F_4 ihre Negation an (sowohl als Satz als auch formal).

2.3 Logische Folgerung

(7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über Formeln.

a) (★) $A \wedge (A \rightarrow B) \models B$

(2 Punkte)

b) (★) $A \rightarrow B \models \neg A \rightarrow \neg B$

(2 Punkte)

c) (★ ★) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \models (A \rightarrow C)$

(3 Punkte)

2.4 Funktionstabellen und Äquivalenzen

- a) (*) Geben Sie für folgende Formel die Funktionstabelle an:

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow C) \wedge \neg(A \vee B)).$$

- b) (***) Geben Sie eine möglichst einfache Formel an, die zur Formel aus Aufgabenteil a) äquivalent ist.
- c) (***) Zeigen Sie die Äquivalenz der Formeln aus Aufgabenteil a) und Ihrer Lösung von Aufgabenteil b), indem Sie die Regeln aus Abschnitt 2.2.4 des Vorlesungsskripts und die Definition von \rightarrow schrittweise anwenden. Sie dürfen dabei ausserdem verwenden, dass für alle Formeln F gilt: $F \wedge \neg F \equiv \perp$, $F \wedge \perp \equiv \perp$ und $F \vee \perp \equiv F$.

2.5 Erfüllbarkeit und Tautologien (*)

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar oder unerfüllbar ist. Geben Sie ausserdem an, ob sie eine Tautologie ist oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- a) $(A \vee B) \wedge \neg A$
- b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge \neg(A \rightarrow C)$

2.6 Von Rittern und Schurken (***)

Sie befinden sich auf einer seltsamen Insel mit zwei Gruppen von Einwohnern: den Rittern und den Schurken. Die Ritter sagen immer die Wahrheit und die Schurken lügen immer. Beide Gruppen lassen sich optisch nicht unterscheiden.

Sie haben sich verlaufen und treffen nun an einer Weggabelung einen Menschen. Sie wissen, dass ein Weg in den gefährlichen Dschungel führt und der andere in die Stadt. Um herauszufinden, welcher Weg in die Stadt führt, dürfen Sie dem Menschen an der Kreuzung eine einzige Frage stellen, die mit „Ja“ oder „Nein“ beantwortet werden kann. Welche wird es sein?

Abgabe am 3. Oktober 2016
Korrigiert wird Aufgabe 2.3.