

Diskrete Mathematik

Übung 3

Teil 1: Prädikatenlogik

3.1 Quantoren und Prädikate

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe sei das Universum die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen.

- a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine Formel an, die nur die Prädikate `less`, `equals` und `prime` enthält und die Aussagen möglichst exakt abbildet (statt `less(n, m)` und `equals(n, m)` dürfen Sie auch $n < m$ bzw. $n = m$ schreiben). Für die Addition und Multiplikation dürfen Sie wie üblich die Symbole $+$ und \cdot verwenden.
- i) ($\star \star$) Ist das Produkt zweier ganzer Zahlen positiv, so ist mindestens eine dieser Zahlen positiv. (2 Punkte)
 - ii) ($\star \star$) Für jede ganze Zahl gibt es eine ganze Zahl, so dass ihre Summe gleich 0 ist. (2 Punkte)
 - iii) ($\star \star \star$) Jede gerade ganze Zahl echt grösser als 2 ist die Summe zweier Primzahlen. (2 Punkte)

Bonusfrage: Welche der obigen Aussagen sind wahr?

- b) Betrachten Sie die Prädikate $P(x)$ und $Q(x, y)$:

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad Q(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

In diesem Kontext beschreiben die folgenden Formeln jeweils eine (mathematische) Aussage. Schreiben Sie diese Aussagen in Worten hin und entscheiden Sie, ob sie wahr sind.

- i) ($\star \star$) $\forall x \exists y Q(x, y)$ (2 Punkte)
- ii) ($\star \star$) $\exists x (\forall y \neg Q(x, y) \wedge \exists y P(y))$ (2 Punkte)

3.2 Vertauschung von Quantoren

Zeigen Sie:

- a) ($\star \star$) $\exists y \forall x P(x, y) \models \forall x \exists y P(x, y)$.

Widerlegen Sie:

- b) ($\star \star$) $\forall x \exists y P(x, y) \models \exists y \forall x P(x, y)$.

3.3 Gewinnstrategie (★ ★)

Alice und Bob spielen um eine Tafel Schokolade. Dazu wählt Alice zwei ganze Zahlen a_1, a_2 und Bob wählt zwei ganze Zahlen b_1, b_2 . Alice gewinnt, wenn $a_1 + (a_2 + b_1)^{|b_2|+1} = 1$.

- a) Wir betrachten zuerst den Fall, in dem Alice und Bob ihre Zahlen gleichzeitig bekanntgeben. Geben Sie eine Formel für die Aussage „Alice hat eine Gewinnstrategie.“ an. Ist diese Aussage wahr?
- b) Im zweiten Fall werden die Zahlen abwechselnd bekannt gegeben. Zuerst nennt Alice a_1 . Dann nennt Bob b_1 . Darauf nennt a_2 . Zuletzt nennt Bob b_2 . Geben Sie eine Formel für die Aussage „Alice hat eine Gewinnstrategie.“ an. Ist diese Aussage wahr?

Teil 2: Beweistechniken

3.4 Direkter Beweis einer Implikation (2.4.3)

Zeigen Sie direkt:

- a) (★ ★) Das Produkt zweier gerader natürlichen Zahlen ist gerade.

3.5 Indirekter Beweis einer Implikation (2.4.4)

Zeigen Sie indirekt, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:

- a) (★ ★) Falls $42^n - 1$ prim ist, ist n ungerade.
- b) (★ ★) Falls n^2 ungerade ist, dann ist auch n ungerade.

3.6 Fallunterscheidung (2.4.7)

Zeigen Sie mittels Fallunterscheidung:

- a) (★ ★) Für jede ganze Zahl n gilt, $5n^2 + 3n + 8$ ist gerade.
- b) (★ ★ ★) Falls p und $p^2 + 2$ Primzahlen sind, ist auch $p^3 + 2$ prim.

Abgabe am 10. Oktober 2016
Korrigiert wird Aufgabe 3.1.