ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 10. Oktober 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik

Übung 4

Teil 1: Beweistechniken

4.1 Widerspruchsbeweis (2.4.8)

a) ($\star\,\star$) Zeigen Sie mittels Widerspruch: Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Differenz zweier rationaler Zahlen rational ist.

b) ($\star\,\star\,\star$) Zeigen Sie für $n > 2$, dass $2^{\frac{1}{n}}$ irrational ist, indem sie einen Widerspruch zum Grossen Satz von Fermat herleiten.

Hinweis: Der Grosse Satz von Fermat besagt, dass die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für $n > 2$ und positive ganzzahlige a, b, c keine Lösung besitzt.

4.2 Existenzbeweis (2.4.9)

Zeigen Sie:

a) ($\star$) Es gibt irrationale Zahlen a und b, so dass ab rational ist.

b) ($\star\,\star\,\star\,\star$) Es gibt irrationale Zahlen a und b, so dass a^b rational ist.

4.3 Schubfachprinzip (2.4.10) ($\star\,\star$)

Gegeben sind fünf paarweise verschiedene Punkte auf der Erdoberfläche. Zeigen Sie, dass eine Hemisphäre (d.h. eine Halbkugel mit Rand) existiert, so dass mindestens vier Punkte in dieser Hemisphäre liegen.

4.4 Gegenbeispiel (2.4.11)

Widerlegen Sie folgende Aussage mit einem Gegenbeispiel:

a) ($\star\,\star$) Falls p eine Primzahl ist, ist auch $2^p - 1$ eine Primzahl.

4.5 Induktionsbeweis (2.4.12)

Beweisen Sie die folgenden Aussage durch Induktion:

a) ($\star\star\star$) In einem Zoo gibt es k Affen und k Kletterstangen, wobei an der Spitze jeder Stange eine Banane hängt. Zwischen den Stangen gibt es insgesamt n Querverbindungen, wobei an einer Stange keine zwei Verbindungen auf gleicher Höhe beginnen.

Die Affen wählen nun alle verschiedene Stangen und beginnen hochzuklettern. Jedes Mal wenn ein Affe auf eine Querverbindung trifft wechselt er die Stange und klettert dort weiter. Sobald er die Spitze der Stange erreicht hat, nimmt er (falls vorhanden) die Banane.

Zeigen Sie, dass für jede gültige Anordnung der n Querverbindungen jeder Affe eine Banane bekommt.

Teil 2: Mengenlehre

4.6 Mengen, Mengenrelationen und Kardinalitäten ($\star\star$) *(9 Punkte)*

a) Geben Sie jeweils eine Menge A an, so dass

- **i)** ein $x \in A$ existiert mit $x \subseteq A$.
- **ii)** $A \not\subseteq \mathcal{P}(A)$ und ein $x \in A$ existiert mit $x \subseteq \mathcal{P}(A)$. *(3 Punkte)*
- **iii)** $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ und für alle $x \in A$ gilt $x \not\subseteq \mathcal{P}(A)$.

b) Sei $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$ und $B = \{A, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$. Bestimmen Sie folgende Mengen und ihre Kardinalitäten:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$ **iii)** $\varnothing \times A$

iv) $\{0\} \times \{3, 1\}$ **v)** $\{\{1, 2\}\} \times \{3\}$ **vi)** $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ *(6 Punkte)*

4.7 Beweise zur Mengenlehre

a) ($\star\star$) Seien A, B beliebige Mengen. Zeigen Sie: $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b) ($\star\star\star$) Seien A, B und C Mengen mit $A \times B = A \times C$. Für welche Mengen A folgt daraus $B = C$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Abgabe am 17. Oktober 2016
Korrigiert wird Aufgabe 4.6