ETH Zürich, D-INFK | Prof. Ueli Maurer
HS 2016, 17. Oktober 2016 | Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 5

5.1 Mengenoperationen

a) ($\star$) Sei A eine beliebige Menge. Zeigen Sie: $\overline{\overline{A}} = A$.

b) ($\star\star$) Seien A, B beliebige Mengen. Zeigen Sie: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) ($\star\star\star$) Seien A, B, C, D beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$\overline{(\overline{B} \cup C)} \cup \left(\overline{(\overline{A} \cup C)} \cap \overline{(A \cup B)} \right) = \left(\overline{(D \cup B)} \cap \overline{(\overline{D} \cup C)} \right) \cup (B \cap \overline{C})$$

5.2 Verwandtschaftsrelationen ($\star\star$)

Wir betrachten als Universum die Menge aller (lebenden und bereits verstorbenen) Menschen und darauf verschiedene Verwandtschaftsrelationen wie in der Vorlesung.

a) Drücken Sie folgende Relationen durch die Relationen *id* (Identität), *iv* (ist Vater von), *im* (ist Mutter von), *ie* (ist Elternteil von) und *ik* (ist Kind von) aus:

- **i)** x *iugr* y $:\Longleftrightarrow$ x ist Urgrossvater von y
- **ii)** x *ihg* y $:\Longleftrightarrow$ x ist Halbgeschwister von y (d.h. x und y haben ein Elternteil gemeinsam, nicht aber beide.)
- **iii)** x *ic* y $:\Longleftrightarrow$ x ist Cousin/Cousine von y (d.h. x und y sind keine Geschwister, haben aber ein Grosselternteil gemeinsam.)

b) In welcher Beziehung stehen die Relationen *ik*$\circ$*ik*$\circ$*ie*$\circ$*ie* und *ik*$\circ$*ie*$\circ$*ik*$\circ$*ie* zueinander? Sind sie gleich oder ist die eine in der anderen enthalten?

5.3 Operationen auf Relationen ($\star\star$)

Betrachten Sie die Relationen $<, \mid$ und $\equiv_2$ auf Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Geben Sie für die folgenden Relationen auf $\mathbb{N}$ an, ob sie jeweils reflexiv, symmetrisch oder transitiv sind. Begründen Sie ihre Antworten.

a) $< \circ \mid$

b) $\mid \cup \equiv_2$

c) $< \cap \overline{<}$

d) $\overline{<} - \widehat{<}$

5.4 Eigenschaften von Relationen *(7 Punkte)*

- **a)** ($\star\star$) Bestimmen Sie für die Relation $\rho = \{(1,4),(2,1),(2,3),(4,2)\}$ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$ die Relationen ρ^3 und ρ^*. *(2 Punkte)*
- **b)** ($\star\star$) Beweisen oder widerlegen Sie für eine beliebige Menge A: Ist die Relation σ auf A nicht reflexiv, so ist auch die Relation σ^2 nicht reflexiv. *(2 Punkte)*
- **c)** ($\star\star\star$) Beweisen oder widerlegen Sie für eine beliebige Menge A: Sind die Relationen σ und ρ auf A anti-symmetrisch, so ist auch die Relation $\sigma \cap \rho$ anti-symmetrisch. *(3 Punkte)*

5.5 Ein falscher Beweis ($\star\star$)

Sei A eine beliebige nicht-leere Menge und $\rho \neq \emptyset$ eine symmetrische und transitive Relation auf A.

- **a)** Zeigen Sie, dass ρ im Allgemeinen nicht reflexiv sein muss.
- **b)** Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis, der zeigen soll, dass ρ immer reflexiv ist.

  Beweis: Wir zeigen, dass ρ reflexiv ist, d.h. wir zeigen für alle x gilt $x \; \rho \; x$. Sei $y \in A$ mit $x \; \rho \; y$. Da ρ symmetrisch ist, folgt daraus $y \; \rho \; x$. Wegen der Transitivität von ρ folgt aus $x \; \rho \; y$ und $y \; \rho \; x$ schliesslich $x \; \rho \; x$. Somit ist ist ρ reflexiv.

Abgabe am 24./25. Oktober 2016
Korrigiert wird Aufgabe 5.4.