ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 24. Oktober 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 6

6.1 Äquivalenzrelationen *(8 Punkte)*

Für ein $x \in \mathbb{R}$ definieren wir auf $\mathbb{R}^2$ folgende Relation:

$$(a,b) \sim (c,d) \quad :\Longleftrightarrow \quad \big((a-x)^2+b^2\big)\big((a+x)^2+b^2\big) - \big((c-x)^2+d^2\big)\big((c+x)^2+d^2\big) = 0$$

a) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. *(6 Punkte)*

b) ($\star\star$) Deuten Sie die Äquivalenzklasse $[(a,b)]$ geometrisch. *(2 Punkte)*

6.2 Ordnungsrelationen

a) ($\star$) Wir betrachten das Poset $(\mathbb{N}-\{0\}, |)$. Welche der folgenden Paare sind vergleichbar?

i) $11, 12$ **ii)** $4, 6$ **ii)** $5, 15$ **ii)** $42, 42$

b) ($\star$) Wir betrachten $(\mathbb{N}-\{0\})\times(\mathbb{N}-\{0\})$ mit der lexikographischen Ordnung bezüglich der Teilbarkeitsrelation $|$. Geben Sie alle Elemente kleiner gleich $(2,5)$ an.

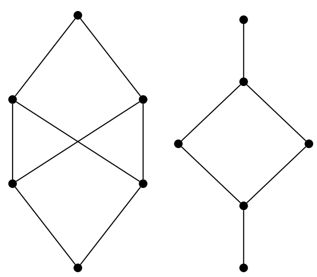
c) ($\star$) Zeigen oder widerlegen Sie: $(\{1,3,6,9,12\}, |)$ ist ein Verband.

d) ($\star\star$) Sei $(A, \preceq)$ ein Poset. Zeigen oder widerlegen Sie: $(A, \widehat{\preceq})$ ist ein Poset.

6.3 Hasse-Diagramm

a) ($\star$) Gegeben seien die beiden Posets $(\{1,2,3\}; \leq)$ und $(\{1,2,3,5,6,9\}; |)$. Zeichnen Sie die zugehörigen Hasse-Diagramme und bestimmen Sie alle grössten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente dieser Posets.

b) ($\star\star$) Sei $\sqsupseteq$ die Überdeckbarkeitsrelation auf der Menge der Rechtecke in der Ebene aus Beispiel 3.39 des Vorlesungsskripts: Es gilt $A \sqsupseteq B$ genau dann, wenn B von A komplett überdeckt werden kann (gegebenenfalls durch geeignete Verschiebungen und Rotationen von A und B). Finden Sie für die auf der rechten Seite gegebenen Hasse-Diagramme je eine Realisierung durch sechs Rechtecke.



6.4 Lexikographische Ordnung ($\star\star\star$)

Beweisen Sie Theorem 3.11 aus dem Skript.

6.5 Abzählbarkeit

a) Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit. Beweisen Sie Ihre Antworten.

i) ($\star$) Die Menge aller Java-Programme.

ii) ($\star\star$) Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen.

iii) ($\star\star$) Die Menge der unendlichen Folgen über $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

iv) ($\star\star\star$) Die Menge der Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$.

b) ($\star\star\star$) Sie müssen ein U-Boot versenken. Das U-Boot fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v \in \mathbb{Z}$ und befindet sich zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ an der Position $v \cdot t + s_0$, wobei $s_0 \in \mathbb{Z}$ die Startposition ist. Die Grössen v und s_0 sind Ihnen nicht bekannt. Sie können zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ einen Torpedo auf eine Position $s \in \mathbb{Z}$ schiessen. Falls sich das U-Boot gerade dort befindet, sinkt es. Gibt es eine Strategie, um das U-Boot in endlicher Zeit zu versenken?

Abgabe am 31. Oktober/1. November 2016
Korrigiert wird Aufgabe 6.1.