

Diskrete Mathematik

Übung 7

Relevant für diese Übung sind insbesondere die Seiten 63 bis 79 im Vorlesungsskript.
Zur Erinnerung: Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

7.1 Der grösste gemeinsame Teiler

(5 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) $(\star \star) \forall a, b, u, v \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad ua + vb = 1 \rightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$ (3 Punkte)
- b) $(\star \star) \forall d \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \exists a, b, u, v \in \mathbb{Z} - \{0\} (ua + vb = d \wedge \text{ggT}(a, b) \neq d)$ (2 Punkte)

7.2 Erweiterter Euklidischer Algorithmus $(\star \star)$

- a) Bestimmen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(553, 26)$ sowie Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $553u + 26v = \text{ggT}(553, 26)$.
- b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot 553 \equiv_{26} 1$ und ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \cdot 26 \equiv_{553} 1$.
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a).

7.3 Irrationalität von Logarithmen $(\star \star)$

- a) Zeigen Sie, dass $\log_7(11)$ irrational ist.
- b) Geben Sie eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}^2$ an, sodass $\log_a(b)$ für alle $(a, b) \in A$ irrational ist. Beweisen Sie, dass diese Menge unendlich ist und dass $\log_a(b)$ für alle $(a, b) \in A$ irrational ist.

7.4 Kongruenz

- a) $(\star \star)$ Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 1$ aus $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$ die Kongruenz $ac \equiv_m bd$ gilt.
- b) $(\star \star)$ Zeigen Sie, dass für alle Primzahlen p und alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(a + b)^p \equiv_p a^p + b^p$$

Hinweis: Verwenden Sie den Binomialsatz.

7.5 Modulare Arithmetik (★ ★)**(6 Punkte)**

- a) Seien $a, e, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mit $R_m(a^e) = 1$. Vereinfachen Sie $R_m(a^n)$. (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie $R_{11}(4^{2015})$ unter der Verwendung von $R_{11}(4^{10}) = 1$. (1 Punkt)
- c) Sei s_a die Summe der Dezimalziffern von $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: (2 Punkte)

$$R_9(a) = R_9(s_a)$$

- d) Berechnen Sie $R_9(98877766665555444444333333222222211111111)$. (1 Punkt)

7.6 Die Insel (★ ★)

Sieben Piraten und ein Affe sammeln auf einer Insel Kokosnüsse, von denen es auf der Insel nicht mehr als 250 gibt. Am Ende eines anstrengenden Tages wollen sie die Kokosnüsse aufteilen. Teilt man diese unter den Piraten und dem Affen in 8 gleiche Teile, bleibt jedoch eine übrig. Da keiner der Piraten einem anderen eine zusätzliche Kokosnuss gönnt, schlägt einer von ihnen vor, die Kokosnüsse unter den 7 Piraten aufzuteilen. In diesem Fall bleiben 2 übrig, die man dann dem Affen überlassen kann. Ein anderer Pirat hält dies für dem Affen gegenüber unfair. Dadurch geraten die zwei Piraten in einen Streit, der für beide tödlich endet. Schliesslich teilen die verbleibenden 5 Piraten die Kokosnüsse untereinander auf, wobei 3 übrig bleiben, die sie dem Affen geben.

Wie viele Kokosnüsse bekommt am Ende jeder überlebende Pirat?

Abgabe am 7. November 2016
Korrigiert werden Aufgaben 7.1 und 7.5