ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 05. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 12

12.1 Äquivalenz Aussagenlogischer Formeln *(14 Punkte)*

a) ($\star$) Zeigen Sie durch Anwendung der Äquivalenzen aus Lemma 6.2, dass die Formel $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$ zu $(C \vee D)$ äquivalent ist. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Äquivalenz Sie verwendet haben. *(3 Punkte)*

b) ($\star$) Bestimmen Sie für die beiden folgenden Formeln jeweils die Menge ihrer Modelle und entscheiden Sie, ob die Formeln äquivalent sind oder ob eine Formel aus der anderen folgt.

$$F := (\neg A \rightarrow B \wedge C) \leftrightarrow \neg C \qquad\qquad G := (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee \neg(\neg A \vee B \vee C)$$

(5 Punkte)

c) ($\star\,\star$) Beweisen Sie: F ist genau dann eine Folgerung von G ($G \models F$), wenn $F \wedge G$ äquivalent zu G ist ($F \wedge G \equiv G$). *(4 Punkte)*

d) ($\star\,\star$) Zeigen oder widerlegen Sie: Zwei aussagenlogische Formeln, die keine gemeinsamen atomaren Formeln haben, sind nicht äquivalent. *(2 Punkte)*

12.2 Erfüllbarkeit ($\star\,\star$)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, sodass F und $F \rightarrow G$ erfüllbar sind, dann ist G erfüllbar.

b) Finden Sie ein Modell für jede der folgenden Formelmengen oder zeigen Sie, dass diese nicht erfüllbar ist.

i. $M = \{\neg A,\ B \wedge C,\ \neg A \rightarrow \neg C\}$
ii. $N = \{A_1 \vee A_2,\ \neg A_2 \vee A_3,\ \neg A_3 \vee A_4, \ldots\}$

12.3 Homers Geburtstag

Homer möchte eine Geburtstagsparty machen und möglichst viele von seinen Freunden einladen. Das Problem ist nur, dass alle so schwierig sind...

Da ist zuerst mal Abe. Er kommt nur, wenn auch Barney kommt. Ist ja kein Problem, aber falls Barney kommt muss auch Carl kommen. Aber wenn Carl kommt, dann kommt hundertprozentig auch Disco Stu. Aber wenn Barney und Disco Stu beide da sind, kommt Carl sicher nicht. Schliesslich kommt Disco Stu natürlich nur, wenn Abe oder Barney (oder beide) da sind.

Nun weiss Homer nicht, ob überhaupt jemand kommen wird, oder ob er einfach zu Moe's gehen soll.

a) ($\star\star$) Formalisieren Sie obige Bedingungen durch aussagenlogische Formeln. Leiten aus diesen (intuitiv) ab, ob Homer Donuts und Bier für die Party kaufen soll.

b) ($\star\star\star$) Verwenden Sie folgende Schlussregeln, um Ihre Antwort aus Aufgabenteil a) formal herzuleiten.

$$\begin{aligned}
\{F \to G, G \to H\} &\quad \vdash_{R_1} \quad F \to H \\
\{F \to G, F \to \neg G\} &\quad \vdash_{R_2} \quad \neg F \\
\{F \to (G \vee H), G \to H\} &\quad \vdash_{R_3} \quad F \to H \\
\{F \to G\} &\quad \vdash_{R_4} \quad F \to (G \wedge F) \\
\{F \to G, \neg G\} &\quad \vdash_{R_5} \quad \neg F
\end{aligned}$$

12.4 Syntax und Semantik von XOR ($\star\star$)

Wir wollen die Aussagenlogik um das Symbol $\oplus$ für das exklusive Oder erweitern ($A \oplus B$ ist genau dann wahr, wenn entweder A oder B wahr ist, aber nicht beides). Wie muss man dafür die Syntax und die Semantik der Aussagenlogik erweitern?

12.5 Aussagenlogische Normalformen ($\star$)

a) Sei $F := (\neg A \to B \wedge C) \leftrightarrow \neg C$. Bestimmen Sie mithilfe der Funktionstabelle von F eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform.

b) Sei $G := (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge (C \wedge D))$. Verwenden Sie die Äquivalenzen aus Lemma 6.2 um eine zu G äquivalente Formel in konjunktiver Normalform zu bestimmen und geben Sie in jedem Schritt an, welche Äquivalenz Sie verwendet haben.

Abgabe bis 12. Dezember 2016
Korrigiert wird Aufgabe 12.1