ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 12. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 13

13.1 Strukturen und Modelle ($\star$) *(8 Punkte)*

a) Welche der folgenden (passenden) Strukturen sind Modelle für die Formel

$$F := \forall x \forall y \forall z \left(P(f(x,y),x) \ \wedge \ P(f(x,y),y) \ \wedge \ \left(\neg P(x,y) \to \neg P(x, f(y,z))\right)\right) \ ?$$

i)	$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{N} - \{0\}$,	$f^{\mathcal{A}}(x,y) = x \cdot y$,	$P^{\mathcal{A}}(x,y) = 1 \ :\Longleftrightarrow \ y \mid x$
ii)	$U^{\mathcal{A}} = \mathbb{N} - \{0\}$,	$f^{\mathcal{A}}(x,y) = x^y$,	$P^{\mathcal{A}}(x,y) = 1 \ :\Longleftrightarrow \ y \mid x$
iii)	$U^{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,	$f^{\mathcal{A}}(A,B) = A \cap B$,	$P^{\mathcal{A}}(A,B) = 1 \ :\Longleftrightarrow \ A \subseteq B$

Dabei ist $\mid$ die Teilbarkeitsrelation. Beweisen Sie Ihre Antworten. *(3 Punkte)*

b) Geben Sie für die Formel $F := \forall x \exists y \left(P(x,y) \ \wedge \ \neg P(f(x),y) \ \wedge \ Q(y,z)\right)$ eine Struktur an, die

- **i)** passend und ein Modell für F ist.
- **ii)** passend und kein Modell für F ist.
- **iii)** nicht passend zu F ist. *(3 Punkte)*

c) Geben Sie jeweils eine Formel der Prädikatenlogik an, die

- **i)** gültig ist.
- **ii)** unerfüllbar ist. *(2 Punkte)*

13.2 Bestimmung der Freien Variablen einer Formel ($\star$)

Markieren Sie alle freien Vorkommen von Variablen in den folgenden Formeln:

- **i)** $\forall x \forall y \ (P(x,y) \vee P(x,z))$
- **ii)** $\forall x \ (\exists x \ P(x) \wedge P(x)) \vee P(x)$
- **iii)** $\forall x \ \left(\exists y \ P(y,x) \vee \exists z \ Q(x, f(z))\right)$

13.3 Pränexform ($\star$)

Gegeben sei die Formel

$$F := \forall z \exists y \left(P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)\right) \wedge \neg \forall z \exists x \ \neg R(f(x,z), z).$$

Formen Sie F in eine bereinigte Pränexform um.

13.4 Prädikatenlogik mit Identität *(6 Punkte)*

In dieser Aufgabe betrachten wir *Prädikatenlogik mit Identität*. Dazu erweitern wir Syntax und Semantik der Prädikatenlogik wie folgt:

Syntax: Wenn t_1 und t_2 Terme sind, dann ist $(t_1 = t_2)$ eine Formel.

Semantik: Wenn F von der Form $(t_1 = t_2)$ für Terme t_1 und t_2 ist, dann ist genau dann $\mathcal{A}(F) = 1$, wenn $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_2)$.

a) ($\star\,\star$) Sei $F := \forall x \forall y\ (x = y)$ und $G := \exists x \exists y\ \neg(x = y)$. Finden Sie jeweils eine Bedingung an eine Struktur $\mathcal{A}$, welche notwendig und hinreichend dafür ist, dass $\mathcal{A}$ ein Modell für F beziehungsweise für G ist. *(4 Punkte)*

b) ($\star\,\star$) Finden Sie eine Formel F mit Identität, sodass für jede zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1 \iff |U^{\mathcal{A}}| \geq 3$ *(2 Punkte)*

13.5 Folgerungen ($\star\,\star$)

Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formeln. Welche dieser Folgerungen gelten?

a) $\models\ F \lor \exists y\, \neg F$

b) $\exists x\, F \land \exists y\, G \ \models\ F \land G$

c) $\{\forall x\, F, \forall y\, G\} \ \models\ F \land G$

13.6 Der Barbier von Zürich ($\star$)

Verwenden Sie Theorem 6.10 um zu zeigen, dass es in Zürich keinen männlichen Barbier gibt, der genau die Männer in Zürich rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

13.7 Die Übung 13 ($\star\,\star\,\star$)

Beweisen Sie folgende Aussage über Personen, die die Vorlesung Diskrete Mathematik besuchen:

> Es gibt eine Person für welche gilt, dass, falls diese Person Übung 13 löst, alle Personen Übung 13 lösen.

a) Sei U die Menge aller Personen, die die Vorlesung Diskrete Mathematik besuchen. Sei weiter P das Prädikat, dass angibt ob eine Person aus U die Übung 13 löst. Schreiben sie mit Hilfe von P die obigen Aussage als eine prädikatenlogische Formel F.

b) Zeigen Sie, dass F eine Tautologie ist (d.h. insbesondere für beliebige U und P gilt).

c) Finden Sie eine weitere (interessante) Interpretation von F, indem sie U und P entsprechend definieren.

keine Abgabe