ETH Zürich, D-INFK
HS 2016, 19. Dezember 2016

Prof. Ueli Maurer
Daniel Tschudi

Diskrete Mathematik
Übung 14

14.1 Syntax von Formeln und Aussagen über Formeln ($\star\star$)

Entscheiden Sie für folgende Ausdrücke jeweils, ob sie entweder syntaktisch fehlerhaft, eine syntaktisch korrekte Formel der Prädikatenlogik oder eine Aussage über prädikatenlogische Formeln sind. Wie üblich dürfen dabei für das Verständnis nicht notwendige Klammern weggelassen werden, ohne die Korrektheit zu beeinflussen. Wenn es sich um eine Aussage über Formeln handelt, entscheiden Sie, ob diese Aussage korrekt ist.

a) $\forall x\ \exists y\ P(z)$

b) $P(x) \models Q(y) \vee P(y)$

c) $(P(x) \models P(x)) \equiv Q(x)$

d) $\forall x\ P(x) \models P(x)$

e) $P(x) \models \forall x\ P(x)$

f) $\{P(x), P(f(a))\} \models P(a)$

14.2 Zusammenhang zwischen Gültigkeit einer Formel und Aussagen über Formeln

Zweck der Aufgabe ist, Aussagen über eine Menge von Formeln durch eine einzige Formel auszudrücken. Für eine Aussage über Formeln $G_1, \ldots, G_k$, ist also ein Formel F gesucht, sodass gilt: F ist genau dann eine Tautologie, wenn die Aussage korrekt ist.

Beispiel: Für die Aussage $G \models \bot$ erfüllt $F := \neg G$ die obige Bedingung.

a) ($\star\star$) Seien $G_1, \ldots, G_k, H$ Formeln. Geben Sie eine Formel F an, sodass gilt: F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\{G_1, \ldots, G_k\} \models H$ gilt.

b) ($\star\star$) Seien G, H Formeln. Geben Sie eine Formel F an, sodass gilt: F ist genau dann eine Tautologie, wenn $G \equiv H$ gilt.

14.3 Kalküle

a) ($\star$) Prüfen Sie die Korrektheit folgender Regeln und beweisen Sie Ihre Antwort:

$$\{F\} \vdash_{R_1} F \vee G \qquad \{F \wedge G\} \vdash_{R_2} F \qquad \{\neg(F \wedge G)\} \vdash_{R_3} \neg F \wedge \neg G$$
$$\{F, F \rightarrow G\} \vdash_{R_4} G \qquad \{F \rightarrow G\} \vdash_{R_5} \neg F \rightarrow \neg G \qquad \{F, G\} \vdash_{R_6} F \wedge G$$

b) ($\star\star$) Sei K der Kalkül, der aus den korrekten Regeln aus Teilaufgabe a) besteht. Leiten Sie die Formel $A \wedge B \wedge C \wedge D$ mit Hilfe von K aus der folgenden Menge von Formeln her.

$$\{(D \wedge A) \rightarrow C, A \wedge B, B \wedge A, (B \vee C) \rightarrow D\}$$

c) ($\star\star$) Ist $K := \{R_2, R_4\}$ vollständig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

d) ($\star\star$) Geben Sie einen Kalkül an, der vollständig ist, aber nicht korrekt.

14.4 Resolution für Aussagenlogik

a) ($\star$) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

i) $F := (A \vee B) \wedge (\neg E) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg D \vee E) \wedge (\neg A \vee B)$ unerfüllbar ist.

ii) $G := (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$ eine Tautologie ist.

b) ($\star\star\star$) Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass ausgehend von einer endlichen Menge von endlichen Klauseln immer nach endlich vielen Resolutionsschritten keine neuen Klauseln mehr hergeleitet werden können. Sei dazu $\mathcal{K}$ eine endliche Menge von endlichen Klauseln und sei $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots$ eine Folge von Klauselmengen mit $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$, sodass für alle $i > 0$ gilt: $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} \cup \{K\}$ mit $\{K_1, K_2\} \vdash_{\mathsf{res}} K$ für geeignete $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{i-1}$. Zeigen Sie:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n \quad \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_n.$$

c) ($\star\star\star\star$) Nun ist zu zeigen, dass die Aussage von b) für unendliche Mengen $\mathcal{K}$ von jeweils endlichen Klauseln nicht mehr gilt. Sei dazu $\mathcal{K} := \big\{\{A_j, \neg A_{j+1}\} \mid j \in \mathbb{N}\big\}$. Zeigen Sie, dass eine unendliche Folge von Klauselmengen $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots$ mit $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$ existiert, sodass für alle $i > 0$ gilt: $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} \cup \{K\}$ mit $\{K_1, K_2\} \vdash_{\mathsf{res}} K$ für geeignete $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{i-1}$ und $\mathcal{K}_i \neq \mathcal{K}_{i-1}$.

Keine Abgabe